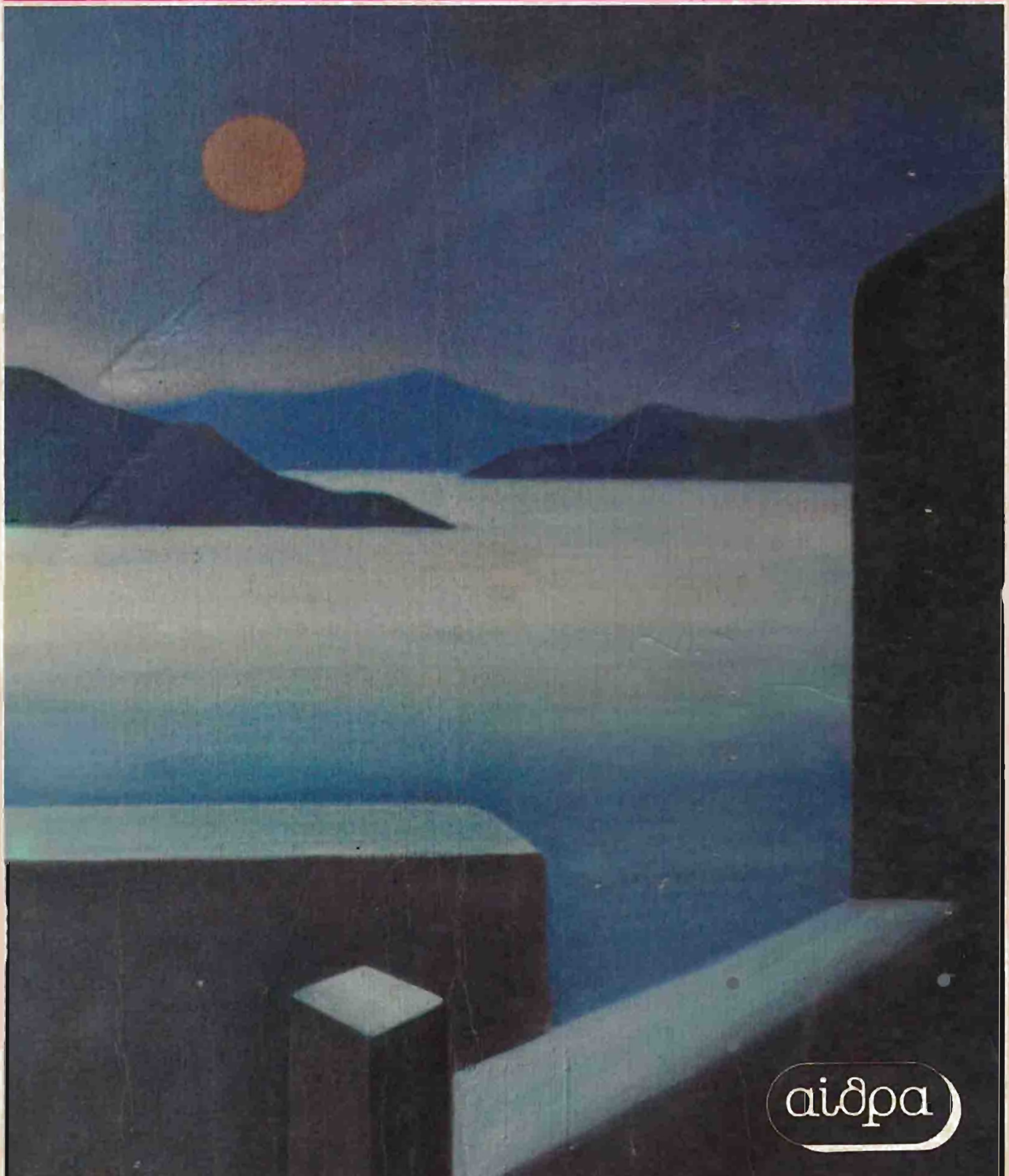
Ε. ΣΠΑΝΔΑΓΟΥ - ΒΑΡΔΑΚΗ
Ρ. ΣΠΑΝΔΑΓΟΥ

ΒΟΗΘΗΜΑ ΣΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ **(ΤΟΜΟΣ Γ΄)**



Ε. ΣΠΑΝΔΑΓΟΥ-ΒΑΡΔΑΚΗ
ΡΟΥΛΑΣ ΣΠΑΝΔΑΓΟΥ

ΒΟΗΘΗΜΑ ΣΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ Γ΄

Διαφορικός Λογισμός

Περιέχει

- Θεωρία
- Μεθοδολογία
- 400 Λυμένες Ασκήσεις
- Θέματα διαφόρων εξετάσεων και διαγωνισμών - Μικτές Ασκήσεις

Σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα

«ΑΙΘΡΑ»
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΛΥΚΕΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

– Το βιβλίο αυτό (δέκατο της σειράς «Αίθρα - βιβλιοθήκη Λυκειακών Μαθηματικών») απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξεως του Λυκείου αλλά και στους συναδέλφους Μαθηματικούς (δεδομένου ότι περιλαμβάνει μια μεγάλη και πρωτότυπη συλλογή ασκήσεων). Είναι γραμμένο με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα που προβλέπεται για την τάξη αυτή και περιλαμβάνει το τρίτο μέρος της μαθηματικής ανάλυσης: **«διαφορικός λογισμός».**
Το βιβλίο αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο περιέχει εκατό περίπου λυμένες ασκήσεις, η δυσκολία των οποίων καθορίζεται από δύο ή τρεις **αστερίσκους.** Στο τέλος του βιβλίου περιέχονται γενικές και μικτές λυμένες ασκήσεις. Η μελέτη των μικτών ασκήσεων θα γίνει μετά την ολοκλήρωση της μελέτης της προβλεπόμενης θεωρίας.
– Δόθηκε έμφαση στις θεωρητικές κυρίως ασκήσεις και στα θέματα εξετάσεων και διαγωνισμών (Γαλλικό **Μπακαλορεά,** εξετάσεις Πανεπιστημίων **Κέμπριτζ, Λονδίνου, Οξφόρδης, Μόσχας, Βουκουρεστίου** κ.α., διαγωνισμός **Γ. Πάτναμ,** διαγωνισμοί διαφόρων ξένων **Μαθηματικών Εταιριών,** διαγωνισμοί **Ολυμπιάδων,** διαγωνισμοί **Ε.Μ.Ε.** κλπ.).
– Για πρακτικούς λόγους θεωρήθηκε σκόπιμο να διατηρηθούν τα σύμβολα «$\Rightarrow$» (συνεπάγεται), «$\forall$» (για κάθε) και «$\exists$» (υπάρχει τουλάχιστον ένα).
Ακόμα σκόπιμο θεωρήθηκε να προηγηθεί το κεφάλαιο «Απροσδιόριστες μορφές» του κεφάλαιου «Μελέτη συνάρτησης».
– Καταβλήθηκε προσπάθεια για μια κατανοητή παρουσίαση της σχετικής θεωρίας, για μια μεθοδολογική αντιμετώπιση πολλών θεμάτων και για μια μεγάλη πρωτοτυπία Ασκήσεων.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1992
Οι συγγραφείς

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α) Ελληνική βιβλιογραφία

1. **Ι. Αναστασιάδου:** «Θεωρία Πραγματικών συναρτήσεων» (τόμος Ι), (Αυτοέκδοση) Θεσσαλονίκη 1972.
2. **Σ. Βαρδάκη:** «Μαθηματική Ανάλυση» τόμοι δύο (Αίθρα) Αθήνα 1984.
3. **Ε. Γαλανή:** «Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση» (Συμεών) Αθήνα 1988.
4. **Δ. Γουβίτσα:** «Μαθηματική Ανάλυση» τόμοι δύο (Αίθρα) Αθήνα 1986.
5. **Δ. Δασκαλόπουλου:** «Γενικά Μαθηματικά» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1972.
6. **Λ. Θεολογίτη:** «Συλλογή Ασκήσεων Πραγματικών Συναρτήσεων» (University Studio) Θεσσαλονίκη 1962.
7. **Δ. Κάππου:** «Απειροστικός Λογισμός» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1962.
8. **Δ. Κάππου:** «Ασκήσεις Αναλύσεως» (τόμοι 2), (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1965.
9. **Θ. Καζαντζή:** «Παράγωγοι συναρτήσεων» (Σπηλιώτης) Αθήνα 1991.
10. **Λ. Κογκέτσωφ:** «Ανώτερα Μαθηματικά» (Αυτοέκδοση) Ξάνθη 1978.
11. **Β. Μισούλη:** «Μαθηματική Ανάλυση» τόμος Α΄, (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1986.
12. **Γ. Μπόζη:** «Γενικά Μαθηματικά Ι» (Αφοί Κυριακίδη), Θεσσαλονίκη 1978.
13. **Σ. Νεγρεπόντη-Σ. Γιωτόπουλου-Ε. Γιαννακούλια:** «Απειροστικός Λογισμός» (Αίθρα) Αθήνα 1988.
14. **Σ. Ντούγια:** «Απειροστικός Λογισμός Ι και ΙΙ» (Παν/μιο Ιωαννίνων) Ιωάννινα 1984.
15. **Α. Ντζαφού:** «Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού» (Αυτοέκδοση) Θεσσαλονίκη 1979.
16. **Α. Νταλαμάγκα:** «Ασκήσεις Ανωτέρων Μαθηματικών» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1977.
17. **Ν. Οικονομίδη:** «Συλλογή Ασκήσεων Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού» (τόμοι Ι,ΙΙ), (Αυτοέκδοση) Θεσσαλονίκη 1982.
18. **Γ. Παντελίδη:** «Μαθηματική Ανάλυση» τόμοι δύο (Ζήτη), Θεσσαλονίκη 1989.
19. **Γ. Παντελίδη:** «Άλγεβρα και Ανάλυση» (Παγουλάτος) Αθήνα 1975.
20. **Λ. Πάσχου:** «Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1967.
21. **Α. Παναγιωτόπουλου-Α. Σαπουνάκη:** «Απειροστικός Λογισμός» τόμοι δύο (Σταμούλης) Πειραιάς 1990.
22. **Β. Σπανδάγου:** «Ασκήσεις Απειροστικού λογισμού» (Αίθρα) Αθήνα 1992.
23. **Β. Σπανδάγου:** «Συναρτήσεις - Παράγωγοι - Ολοκληρώματα» (Gutenberg) Αθήνα 1976.
24. **Β. Στάικου:** «Ασκήσεις Μαθηματικής Αναλύσεως» τόμοι δύο (Παν/μιο Ιωαννίνων) Ιωάννινα 1984.
25. **Γ. Τσάγκα:** «Ανώτερα Μαθηματικά» (Αφοί Κυριακίδη), Θεσ/νίκη 1990.
26. **Λ. Τσίτσα:** «Μαθήματα γενικών Μαθηματικών» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1980.
27. **Ι. Χαΐνη:** «Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως» τόμος Α΄ (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1989.
28. **Κ. Χιώτη:** «Ασκήσεις-Θέματα Απειροστικού Λογισμού» (Αυτοέκδοση) Αθήνα 1980.
29. **Α. Χολίδη:** «Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού» (Μαζαράκης) Αθήνα 1969.
30. **Α. Χάνου:** «Ασκήσεις Αναλύσεως» (Αυτοέκδοση) Πάτρα 1981.
31. **Ι. Χούσιου:** «Παράγωγοι συναρτήσεων» (Αυτοέκδοση) Πάτρα 1985.

β) Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

1. **J. Aramanovich:** «Mathematical Analysis» (Pergamon Press) N. York 1966.
2. **R. Courant:** «Introduction to Calculus and Analysis» Vol. I (Interscience Publishers) N. York 1965.
3. **Z. Massena:** «Elementary Analysis» (Dover) Boston 1979.
4. **R. Cuttica:** «Exércises de Mathématiques» (P.N.) Nice 1987.
5. **M. Nicolescu-N. Dinculeanu-S. Marcus:** «Analiza - Matematica, (Vol. I,II)» Bucuresti 1961.
6. **S. Nicolsky:** «A Course of Mathematical Analysis» (Mir) Moscow 1981.
7. **A. Gleason-A. Greenwood-L. Kelly:** «The W. Lowell Putnam Mathematical competition, Problems and Solutions» 1938-1964. (M.A. of America 1980).
8. **T. Flett:** «Mathematical Analysis» (McGraw-Hill) N. York 1966.
9. **R. Goldberg:** «Methods of Real Analysis» (Blaisdell) N. York 1978.
10. **W. Rudin:** «Principles of Mathematical Analysis» (McGraw-Hill) N. York 1980.
11. **M. Rosculet:** «Analiza Matematica» Bucuresti 1979.
12. **W. Parzynski-P. Zipse:** «Introduction to Mathematical Analysis» (McGraw-Hill) N. York 1982.
13. **M. Spivak:** «Calculus» (Benjamin), London 1967.
14. **R. Levis:** «Corso di Analisi Matematica» (T.G.) Roma 1978.
15. **R. Cooper:** «Functions of Real Variables» (V. Nostrand) London 1979.
16. **G. Patersen-R. Graesser** «Differential Integral Calculus» (L-A) N. Jersey 1974.
17. **M. Lambert-G. Zara:** «Exércices et problémes d' Analyse» (Vuibert) Paris 1979.
18. **F. Rideau:** «Exércices de Calcul differentiel» (Hermann) Paris 1979.
19. **P. Panko-A. Porov:** «Exércices et problémes de mathématiques supérieures» (Mir), Moscou 1980.
20. **E. Swokowski:** «Calculus» (P. Weber) Toronto 1980.
21. **F. Frenet:** «Exércices d' Analyse Mathématique» Paris 1904.
22. **H. Weisbecker:** «The Calculus problem solver» (REA) N. York 1986.
23. **H. Perlis:** «Advanced Calculus» (Chelsea) N. York 1961.
24. **W. Osgood:** «Functions of real variables» (Chelsea) N. York 1965.
25. **W. Kaplan:** «Advanced Calculus» (AW.P.C.) London 1963.
26. **O. Manturov-N. Matveev:** «A course of higher Mathematics» (Mir) Moscow 1989.
27. **G. Caunt-M.A., M.Sc.:** «Introduction to infinitesimal Calculus» (Oxford), London 1952.
28. **J. Green:** «Calculus» (I.D.V.) N. York 1987.
29. **N. Bali:** «Real Analysis» (Lahmi P.) Delhi 1989.
30. **N. Bali:** «Differential Calculus» (Lahmi P.) Delhi 1985.
31. **V. Smirnov:** «Cours de Mathématiques supérieures» (Mir) tome I-II-III Moscou 1972.
32. **G. Morel:** «Problémes de Baccalauréat» (Vuibert) Paris (1925, 1942 1950).
33. **A. Roulé:** «Problémes de Baccalauréat» (Vionsiens) Paris (1979-1986).
34. **K. Ross:** «Elementary Analysis» (Spinger-V) N. York 1980.
35. **A. Sinnorié:** «Exercices de Calcul differentiel» (Hermann) Paris 1969.
36. **A. Doneddu:** «Nouveau cours de Mathématiques» (Vuibert) Paris 1979.
37. **F. Zandou:** «Exércices et problémes d' Analyse» (Vuibert) Paris 1983.
38. **J. Monier:** «Analyse» (Dunod Université) Paris 1990.
39. **Y. Bellecave** κ.τ.λ.: «Thémes mathématiques» (N.C.F. Nathan) Paris 1987.
40. **B. Demidovich:** «Recueil d' exércices et de Problèmes d' Analyse Mathématique» (Mir) Moscow 1977.
41. **M. Krasnov** κ.τ.λ.: «Mathematical Analysis for Engineers» (Mir) Moscow 1989.

γ) Ξενόγλωσση μεταφρασμένη βιβλιογραφία

1. **T. Apostol:** «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός» (Ατλαντίς) Αθήνα 1962.
2. **M. Spivak:** «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός» (Παν/κές εκδόσεις Κρήτης) Ηράκλειο 1991.
3. **L. Brand:** «Μαθηματική Ανάλυση» (ΕΜΕ) Αθήνα 1984.
4. **E. Smith:** κ.ά. «Μαθηματική Ανάλυσις» (Σχολή Ναυτικών Δοκίμων) Αθήνα 1958.
5. **E. Dimanski:** «Ασκήσεις Μαθηματικής Αναλύσεως» (Παν/μιο Θεσ/νίκης) Θεσ/νίκη 1979.

δ) Περιοδικά

1. «Journal de Mathématiques Elemantaire» (Vuibert) διάφορες χρονολογίες.
2. «Ευκλείδης» (Ε.Μ.Ε.) διάφορες χρονολογίες.
3. «Casseta Matematica» διάφορες χρονολογίες.

Οι συγγραφείς θεωρούν υποχρέωσή τους να ευχαριστήσουν τους μαθηματικούς μεταπτυχιακούς υποτρόφους κ.κ. **Τζομπανίδη Αναστάσιο, Τοπούζιο Κυριάκο** και **Κυράστα Παύλο** για την αποστολή προσφάτων θεμάτων διαφόρων διαγωνισμών των μαθηματικών εταιριών **Σκωτίας, Ισπανίας, Λουξεμβούργου, Αυστρίας, Βελγίου, Γαλλίας** και **Γερμανίας.**

Υπάρχει και... ζωγραφική

Η ζωγράφος Γιούλικα Λακερίδου (έργο της είναι ο πίνακας του εξωφύλλου), γεννήθηκε στην Κύπρο. Σπούδασε στην Σχολή Καλών Τεχνών στο Παρίσι και στην Ecole Pratique de Hautes Etudes στη Sorbonne. Τιμήθηκε με αργυρό και χρυσό μετάλλιο το 1971 και 1977 αντίστοιχα στο Salon des Artistes Francais. Έργα της βρίσκονται σε ιδιωτικές συλλογές στην Κύπρο, στην Ελλάδα και στο εξωτερικό. Επίσης στη Συλλογή του Υπουργείου Παιδείας στην Κύπρο, στην Εθνική Πινακοθήκη στην Αθήνα, στο Μουσείο Μοντέρνας Τέχνης στη Γαλλία και στην Εθνική Βιβλιοθήκη στο Παρίσι. Από το 1967 ζει στο Παρίσι.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Λόγος μεταβολής: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Δ $(\Delta \subseteq R)$. Υποθέτουμε ότι $x_o \in \Delta$. Ονομάζουμε "λόγο μεταβολής" της f μεταξύ x_o και x, το λόγο:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g που σε κάθε σημείο $x \neq x_o$ του Δ, αντιστοιχίζει το λόγο μεταβολής $g(x)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ της f μεταξύ x_o και x. Τότε έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Παράγωγος αριθμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_o \in \Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο x_o**, όταν ο λόγος μεταβολής:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

έχει πεπερασμένο όριο στο x_o (δηλαδή όταν $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \in R$).

Το όριο αυτό λέγεται **"παράγωγος αριθμός της f στο x_o"** ή **"παράγωγος της f στο x_o"** και συμβολίζεται με $f'(x_o)$ ή με $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o}$.

Παράγωγος συνάρτηση

Υποθέτουμε τώρα ότι Δ_1 είναι το σύνολο των $x \in \Delta$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $\Delta_1 \neq \emptyset$. Αν σε κάθε $x_o \in \Delta_1$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό της f στο x_o, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο Δ_1, που συμβολίζεται* f', η οποία λέγεται **"παράγωγος (συνάρτηση) της f"**.

Έτσι ο παράγωγος αριθμός της f στο x_o είναι η τιμή της παραγώγου f' στο x_o. Δηλαδή:

$$\boxed{f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

Παρατήρηση 1: Ο λόγος μεταβολής $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, αν θέσουμε $x-x_o=h$ (1)

* Ή και με $\frac{df}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}$.

(οπότε $x=x_0+h$), γράφεται: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Όταν $x \longrightarrow x_0$, από την (1) προκύπτει ότι $h \longrightarrow 0$, επειδή δε $x-x_0 \neq 0$, είναι και $h \neq 0$. Επομένως έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Longrightarrow \boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}^{*}$$

Έτσι έχουμε μια άλλη έκφραση του $f'(x_0)$.

Παρατήρηση 2: Μια συνάρτηση λέγεται **παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο,** όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε τη **συνάρτηση f** με $f(x)=x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο $f'(1)$.

Λύση: Ο παράγωγος αριθμός της f στο σημείο $x_0=1$ είναι:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

2. **Θεωρούμε τη συνάρτηση f με** $f(x)=x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η f'.

Λύση: Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$$

Επειδή το x_0 είναι τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$, θα είναι και $f'(x)=3x^2$. Έτσι λοιπόν η παράγωγος συνάρτηση f' της f έχει τύπο $f'(x)=3x^2$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Πλευρική παράγωγος

α) Η συνάρτηση f λέγεται **"παραγωγίσιμη από αριστερά"** στο σημείο x_0 (του πεδίου ορισμού της), όταν το $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό είναι η τιμή της παραγώγου από αριστερά της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_\alpha(x_0)$ ή $f'(x_0-0)$ ή $f'(x_0^-)$. Ώστε, λοιπόν, είναι:

$$\boxed{f'_\alpha(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Η τιμή $f'_\alpha(x_0)$ ονομάζεται και αριστερή παράγωγος της f στο x_0.

β) Η συνάρτηση f λέγεται **"παραγωγίσιμη από δεξιά"** στο σημείο x_0 (του πεδίου ορισμού της), όταν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό είναι η τιμή της παραγώγου από δεξιά της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_\delta(x_0)$ ή $f'(x_0+0)$ ή $f'(x_0^+)$. Ώστε λοιπόν, είναι:

$$\boxed{f'_\delta(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Η τιμή $f'_\delta(x_0)$ ονομάζεται και δεξιά παράγωγος της f στο x_0.

Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ και είναι:

$$f'_\alpha(x_0)=f'_\delta(x_0)$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο παράγωγος αριθμός στο μηδέν, της συνάρτησης f, με

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\le 0 \\ x^2, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Λύση: Επειδή η συνάρτηση αριστερά-δεξιά του μηδέν ορίζεται με διαφορετικούς τύπους, θα αναζητήσουμε τη δεξιά και την αριστερή παράγωγο στο μηδέν. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1$$

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

Επειδή $f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)$, δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 0.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης (Διαδοχικές παράγωγοι)

Η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι, όπως είδαμε, μια νέα συνάρτηση. Επομένως είναι δυνατόν να είναι και αυτή παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι, θα ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος της f', που λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της **f** και συμβολίζεται συνήθως* f''. Όμοια η παράγωγος της f'' (αν υπάρχει) λέγεται **τρίτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται f''', κτλ. Γενικά, για κάθε $\nu\ge 2$ η παράγωγος της $\nu-1$ παραγώγου της f (αν υπάρχει) λέγεται **νιοστή παράγωγος της f** και συνήθως για $\nu>4$, συμβολίζεται** $f^{(\nu)}$, επειδή ο συμβολισμός με τόνους δεν είναι πρακτικός. Η παράγωγος της f λέγεται και **πρώτη παράγωγος.**

Παρατήρηση: Αν υπάρχει η $f^{(\nu)}$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ν φορές παραγωγίσιμη.

* Συμβολίζουμε ακόμα και $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ή $\lim \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, όπου Δx=

* ... d^2f ... $d^2f(x)$ | ** ... $d^\nu f$

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^2$, $x\in\mathbf{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f''.

Λύση: Έστω $x_0\in R$. Είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-2x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}2(x+x_0)=2(2x_0)=4x_0$$

Επειδή x_0 είναι τυχαίο σημείο του **R**, θα είναι $f'(x)=4x$. Άρα η f' έχει τύπο $f'(x)=4x$ και πεδίο ορισμού το **R**. Έστω τώρα $\xi\in\mathbf{R}$. Είναι:

$$f''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{4x-4\xi}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}4=4$$

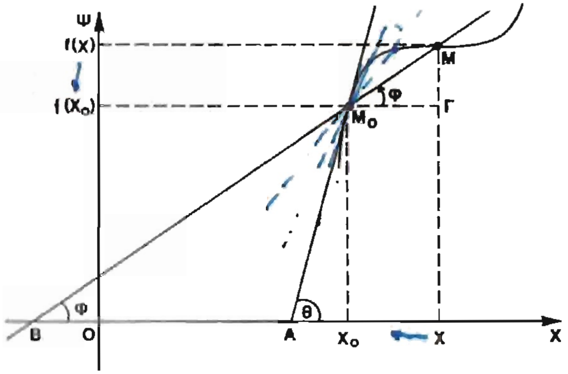
Επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του **R**, θα είναι $f''(x)=4$. Άρα η f'' έχει τύπο $f''(x)=4$ και πεδίο ορισμού το **R**.

Η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της και M_0 το σημείο της γραφικής της παράστασης $\mathcal{C}$ με τετμημένη x_0. Αν M είναι ένα άλλο σημείο της $\mathcal{C}$ με τετμημένη x, τότε από τις συντεταγμένες των σημείων $M_0(x_0,f(x_0))$ και $M(x,f(x))$, βρίσκουμε ότι η ευθεία M_0M έχει συντελεστή διευθύνσεως:

$$\varepsilon\varphi\varphi=g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad(1)$$

δηλαδή το **λόγο μεταβολής** της f μεταξύ x_0 και x.



Πράγματι από το ορθογώνιο τρίγωνο $MM_0\Gamma$, προκύπτει ότι:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\overline{\Gamma M}}{\overline{M_0\Gamma}}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x\longrightarrow x_0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα είναι και $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Άρα το σημείο M τείνει να συμπέσει στο σημείο M_0, οπότε η MM_0 τείνει να πάρει μια οριακή θέση M.A. Η οριακή θέση της MM_0, όταν $x\longrightarrow x_0$, ονομάζεται εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο M_0. Έτσι λοιπόν, παρατηρούμε ότι:

$$x\longrightarrow x_0\Longrightarrow M\longrightarrow M_0\Longrightarrow MM_0\longrightarrow M_0A\Longrightarrow\varphi\longrightarrow\theta\Longrightarrow\varepsilon\varphi\varphi\longrightarrow\varepsilon\varphi\theta$$

Αν υποθέσουμε ότι το $\lim_{x\to x_0}g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός η (1) δίνει:

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon\varphi\varphi=\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Longrightarrow\boxed{\varepsilon\varphi\theta=f'(x_0)}$$

> Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η παράγωγος της f στο σημείο x_0 έχει τιμή ίση με τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο M_0 του διαγράμματος της f.

Παρατήρηση 1: Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 μηδενίζεται, τότε η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$ του διαγράμματος της είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Παρατήρηση 2: Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$ του διαγράμματος της f είναι:

$$\psi-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\qquad(1)$$

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα, η (1) γράφεται:

$$\boxed{\psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}\qquad(2)$$

Προσοχή! Το σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης ευθείας στο διάγραμμα της συνάρτησης f.

Παρατήρηση 3: Οι ημιευθείες:

$$\boxed{\psi-f(x_0)=f'_\alpha(x_0)(x-x_0),\ x\le x_0}$$
$$\boxed{\psi-f(x_0)=f'_\delta(x_0)(x-x_0),\ x\ge x_0}$$

λέγονται αντίστοιχα **ημιεφαπτόμενες από αριστερά** ή **από δεξιά** της γραφικής παράστασης $\mathcal{C}$ της f στο σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$.

Παρατήρηση 4: Αν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ απειρίζονται, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $x=x_0$.

Παραδείγματα:

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του διαγράμματος της συνάρτησης f, με $f(x)=x^3$, στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

Λύση: Είναι $x_0=1$, άρα $f(x_0)=1$ και:

Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x_0 υπάρχουν οι $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ και είναι διαφορετικές, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται γω-

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

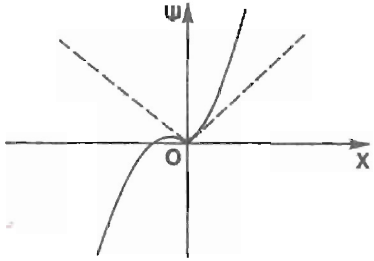
Έτσι η εξίσωση (2) δίνει $\psi-1=3(x-1)$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης f, με $f(x)=|x|(x+1)$, στο σημείο A που έχει τετμημένη 0.

Λύση: Είναι: $f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|(1+x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1$

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|(x+1)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x+1)}{x}=\lim_{x\to0^-}(-x-1)=-1$$

Επειδή $f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)$, δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός στο 0. Θα έχουμε λοιπόν, αριστερά ημιεφαπτομένη και δεξιά ημιεφαπτομένη, με εξισώσεις αντίστοιχα, $\psi-0=-1(x-0)$, $\psi-0=1(x-0)$, δηλαδή $\psi=-x$, $\psi=x$.



3. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

α) Να δειχθεί ότι η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη εφαπτομένη του διαγράμματος της f, στο σημείο M(2,0).

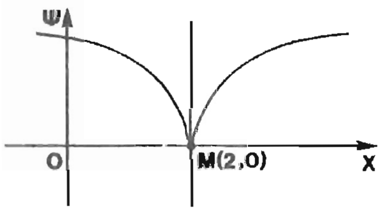
β) Υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη;

Απόδειξη:

α) Είναι:

$$f'_\alpha(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=-\infty$$

$$f'_\delta(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=+\infty$$



Επειδή οι $f'_\alpha(2)$, $f'_\delta(2)$ απειρίζονται στο σημείο x=2, υπάρχουν δυο ημιεφαπτόμενες στο σημείο M(2,0) (αριστερά και δεξιά), που ταυτίζονται με την ευθεία x=2 (κατακόρυφη εφαπτομένη).

β) η οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$, έχει συντελεστή διευθύνσεως λ=0. Είναι: $\lambda=f'(x_o)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x_o-2}}=0$

που είναι αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Παράγωγος και Συνέχεια

Θεώρημα:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2-1$, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2 διότι $f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-1)-(2^2-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

Επομένως η f **είναι** συνεχής στο σημείο 2.

Παρατήρηση 1: Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, δεν έπεται ότι αναπαραίτητα παραγωγίζεται στο x_o.

Παράδειγμα: Η g με $g(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0, γιατί:

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}(-x)=0=g(0)\quad\text{και}\quad\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}x=0=g(0)$$

αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Πράγματι είναι:

$$g(x)=\begin{cases}-x, & \forall x\in(-\infty,0]\\ x, & \forall x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

οπότε: $$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1$$

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

Επειδή $g'_\alpha(0)\neq g'_\delta(0)$, η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0.

Παρατήρηση 2: Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, θα είναι συνεχής στο Δ.

Παρατήρηση 3: Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o (διότι αν ήταν παραγωγίσιμη θα ήταν συνεχής).

Παράγωγοι* βασικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε τις παραγώγους μερικών βασικών συναρτήσεων:

* Για πρακτικούς λόγους παράγωγοι ορισμένων συναρτήσεων προηγούνται των κανόνων παραγώγισης.

Ισχύουν τα επόμενα:

1. Η συνάρτηση f(x)=c είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) και είναι:

$$c'=0$$

2. Η συνάρτηση f(x)=x είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με:

$$x'=1$$

3. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με:

$$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$$

4. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και είναι:

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5. Οι συναρτήσεις f(x)=ημx και f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις: $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

6. Η συνάρτηση f(x)=lnx είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x}$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) και ισχύει:

$$(e^{x})'=e^{x}$$

8. Η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

9. Η συνάρτηση f(x)=εφx είναι παραγωγίσιμη $\left(\text{στο } \mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}\right\}\right)$

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

10. Η συνάρτηση f(x)=σφx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x=\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}\}$ και ισχύει: $(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

11. Η συνάρτηση f(x)=ln|x| είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}^*$) και ισχύει:

$$[\ln|x|]'=\frac{1}{x}$$

12. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) και ισχύει:

$$(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln\alpha$$

13. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\tau}$, $x\in(0,+\infty)$, $\tau\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $(x^{\tau})'=\tau x^{\tau-1}$

14. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) και ισχύει:

$$(\alpha_\nu x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)' = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+2\alpha_2x+\alpha_1$$

Κανόνες Παραγώγισης

Επειδή με τη βοήθεια του ορισμού είναι δύσκολο να βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, γι αυτό χρησιμοποιούμε διάφορες προτάσεις που είναι γνωστές σαν κανόνες παραγώγισης. Έτσι λοιπόν έχουμε τα επόμενα θεωρήματα και πορίσματα:

α) Παράγωγος αθροίσματος

Θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\Delta$, τότε και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Πόρισμα:

Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε και οι συναρτήσεις f+g, $f_1+f_2+\ldots+f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και μάλιστα είναι:

$$(f+g)'=f'+g'$$

$$(f_1+f_2+\ldots+f_k)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_k'$$

Παράδειγμα: **Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2+\eta\mu x$.**

Λύση: Είναι $f'(x)=(x^2+\eta\mu x)'=(x^2)'+(\eta\mu x)'=2x+\sigma\upsilon\nu x$

β) Παράγωγος γινομένου

Θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\Delta$, τότε και η συνάρτηση (f·g) είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Πόρισμα:

Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, τότε και οι συναρτήσεις $f\cdot g$, λf, $f_1 f_2\ldots f_\kappa$, f^κ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$
$$(\lambda f)'=\lambda f'$$
$$(f_1 f_2\ldots f_\kappa)'=f_1' f_2\ldots f_\kappa+f_1 f_2'\ldots f_\kappa+\ldots+f_1 f_2\ldots f_\kappa'$$
$$(f^\kappa)'=\kappa f^{\kappa-1}f'$$

Παραδείγματα:

1. Να παραγωγισθεί η f με $f(x)=e^x$συνx.

Λύση: Είναι $f'(x)=(e^x\text{συν}x)'=(e^x)'\text{συν}x+e^x(\text{συν}x)'=e^x\text{συν}x-e^x\text{ημ}x$.

2. Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f με $f(x)=16\text{ημ}x$.

Λύση: Είναι $f'(x)=(16\text{ημ}x)'=16(\text{ημ}x)'=16\text{συν}x$

3. Να παραγωγισθεί η f με $f(x)=e^x(\text{ημ}x)(\ln x)$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=[e^x(\text{ημ}x)(\ln x)]'=(e^x)'(\text{ημ}x)(\ln x)+e^x(\text{ημ}x)'(\ln x)+$
$+e^x(\text{ημ}x)(\ln x)'=e^x(\text{ημ}x)(\ln x)+e^x(\text{συν}x)(\ln x)+e^x(\text{ημ}x)\left(\frac{1}{x}\right)$

γ) Παράγωγος πηλίκου

Θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_o\in\Delta$ και $g(x_o)\neq0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o)=-\frac{g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

Πόρισμα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $g(x)\neq0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμές στο Δ και

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2},\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Παράδειγμα:

Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{\ln x}{e^x}$.

Λύση: Είναι $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)'=\frac{(\ln x)'e^x-(\ln x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{\frac{1}{x}e^x-e^x\ln x}{e^{2x}}$

δ) Παράγωγος σύνθεσης δυο συναρτήσεων

Θεώρημα:

Έστω g και f δυο συναρτήσεις από τις οποίες η g είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $x_o\in\Delta$ και η f είναι ορισμένη σε διάστημα $E\supseteq g(\Delta)$ και παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$. Τότε η σύνθεσή τους $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και:

$$(f\circ g)'(x_o)=f'(g(x_o))\cdot g'(x_o)$$

Παραδείγματα:

1. Να παραγωγισθεί η f, με $f(x)=\text{ημ}(x^2+x)$.

Λύση: Είναι $f'(x)=[\text{συν}(x^2+x)](x^2+x)'=(2x+1)\text{συν}(x^2+x)$.

2. Να παραγωγισθεί η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+x+1)$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=[\ln(x^2+x+1)]'=\frac{1}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Πόρισμα

Έστω g μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $g(x)>0$, τότε:

$$(\sqrt{g(x)})'=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Παράδειγμα: Να παραγωγισθεί η f, με $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=(\sqrt{x^2+1})'=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ε) Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα:

Έστω f μια αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο Δ συνάρτηση, με $f'(x_o)\neq0$, $x_o\in\Delta$, τότε η αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x_o)=\psi_o$ και ισχύει: $[f^{-1}(\psi_o)]'=\frac{1}{f'(x_o)}$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x}$ στο σημείο $x_o=8$.

Λύση: Έχουμε $f^{-1}(x)=x^3$ και $f(8)=\sqrt[3]{8}=2$. Άρα:

$$f'(8)=\frac{1}{[f^{-1}(f(8))]'}=\frac{1}{[f^{-1}(2)]'}=\frac{1}{(3x^2)_{x=2}}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}.$$

Το σύμβολο του Leibniz

Το σύμβολο του Leibniz $\frac{d}{dx}$ παρέχει τη δυνατότητα να εκφράζουμε ορισμένους τύπους παραγώγων εποπτικώτερα. Έτσι για παράδειγμα, ο τύπος που δίνει την παράγωγο της σύνθεσης $\psi=g(f(x))$ των συναρτήσεων $u=f(x)$ και $\psi=g(u)$ γράφεται:

$$\boxed{\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Πίνακας ανακεφαλαίωσης των τύπων παραγώγισης

Κανόνες παραγώγισης
$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
$[cf(x)]'=cf'(x)$
$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$
$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Παράγωγοι απλών συναρτήσεων	
$(c)'=0$	$(x)'=1$
$(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x>0$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$	$[\ln\lvert x\rvert]'=\frac{1}{x}$
$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\sigma\varphi x)'=\frac{-1}{\eta\mu^2 x}$

$(e^x)'=e^x$	$(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$	$(x^\tau)'=\tau x^{\tau-1}$, $\tau\in\mathbb{R}$, $x>0$

Παράγωγοι συνθέτων συναρτήσεων
$[[f(x)]^\nu]'=\nu[f(x)]^{\nu-1}\cdot f'(x)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$
$(\sqrt{f(x)})'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $f(x)>0$
$(\eta\mu f(x))'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu f(x))'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$[\ln f(x)]'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, $f(x)>0$
$(\ln\lvert f(x)\rvert)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$[\varepsilon\varphi f(x)]'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$[\sigma\varphi f(x)]'=\frac{-1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$[e^{f(x)}]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$[\alpha^{f(x)}]'=\alpha^{f(x)}\cdot\ln\alpha\cdot f'(x)$
$[(f(x))^\tau]'=\tau(f(x))^{\tau-1}\cdot f'(x)$

Παραδείγματα:

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x^4-3x+1$.

Λύση: Έχουμε: $f'(x)=(x^4)'-(3x)'+(1)'=4x^3-3+0=4x^3-3$

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x^2(x^3+1)$.

Λύση: Έχουμε:

$$f'(x)=(x^2)'(x^3+1)+x^2(x^3+1)'=2x(x^3+1)+x^2(3x^2)=2x^4+2x+3x^4=5x^4+2x$$

3. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Λύση: 'Εχουμε:

$$f'(x)=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x(2x+0)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

4. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x(x+1)$ / R, στο σημείο 0.

Λύση: 'Εχουμε $f'(x)=x'(x+1)+x(x+1)'=x+1+x=2x+1$, επομένως:

$$f'(0)=2\cdot 0+1=1$$

5. Αν η συνάρτηση g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=g(\ln x)$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=g'(\ln x)(\ln x)' \Leftrightarrow f'(x)=g'(\ln x)\frac{1}{x}$.

'Αρα: $f''(x)=[g'(\ln x)]'\frac{1}{x}+g'(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f''(x)=g''(\ln x)(\ln x)'\frac{1}{x}+$ $+g'(\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow f''(x)=g''(\ln x)\frac{1}{x^2}-g'(\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 0, να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=(\eta\mu x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση: Είναι $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)f(x)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim_{x\to 0}f(x)=1\cdot f(0)=f(0).$$

Επειδή $f(0)\in\mathbb{R}$ η g είναι παραγωγίσιμη στο 0.

7. Να δειχθεί ότι για $0<\alpha\neq 1$ είναι $(\log_\alpha x)'=\frac{1}{x\ln\alpha}$.

Απόδειξη: Είναι: $(\log_\alpha x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln\alpha}\right)'=\frac{1}{\ln\alpha}(\ln x)'=\frac{1}{\ln\alpha}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln\alpha}$

8. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση εφαπτομένη είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη: Η εφx ορίζεται σε κάθε x, με συνx≠0. 'Εχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

9. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2}$.

Λύση:

'Εχουμε $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}(\sqrt{x^2+2})'=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\frac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=$

$$=\frac{x}{x^2+2}.$$

10. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{x-e^x}{1+x\ln x}$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=\frac{(x-e^x)'(1+x\ln x)-(x-e^x)(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}=$

$$=\frac{(1-e^x)(1+x\ln x)-(x-e^x)(x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}=$$

$$=\frac{1+x\ln x-e^x-xe^x\ln x-x\ln x-x+e^x\ln x+e^x}{(1+x\ln x)^2}=\frac{(1-x)(1+e^x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$

11. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x^2e^{2x}$.

Λύση: 'Εχουμε: $f'(x)=(x^2e^{2x})'=(x^2)'e^{2x}+x^2(e^{2x})'=$

$$=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2e^{2x}(x+x^2)$$

Για να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο αρκεί να παραγωγίσουμε την f', με $f'(x)=2e^{2x}(x+x^2)$. Είναι:

$$f''(x)=2\left[e^{2x}(x+x^2)\right]'=2(e^{2x})'(x+x^2)+2e^{2x}(x+x^2)'=$$

$$=2\cdot 2e^{2x}(x+x^2)+2e^{2x}(1+2x)=2e^{2x}(2x^2+4x+1)$$

12. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$.

Λύση: Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων f_1, με $f_1(x)=\eta\mu x$ και f_2, με $f_2(x)=x^2+1$, δηλαδή είναι $f=f_1\circ f_2$. 'Ετσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=[\sigma\upsilon\nu(x^2+1)](x^2+1)'=2x\sigma\upsilon\nu(x^2+1)$$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3$. Να βρεθεί η παράγωγός της στο σημείο $x_0=-1$.

Λύση:

α' τρόπος: 'Εχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε για $x=-1$, προκύπτει:

$$f'(-1)=3(-1)^2=3$$

β' τρόπος: Είναι:

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-(-1)^3}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$$

Παρατηρήσεις-Μεθοδεύσεις

1. Όταν λέμε να παραγωγισθεί μια συνάρτηση f, εννοούμε να βρούμε την συνάρτηση f'. Η f' βρίσκεται με τους κανόνες παραγώγισης σε συνδυασμό με τις παραγώγους των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα:

Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln x+e^x}{x^2+1}$.

Λύση: Είναι: $f'(x)=\dfrac{(\ln x+e^x)'(x^2+1)-(\ln x+e^x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{[(\ln x)'+(e^x)'](x^2+1)-(\ln x+e^x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\left(\frac{1}{x}+e^x\right)(x^2+1)-(\ln x+e^x)2x}{(x^2+1)^2}$$

2. Όταν θέλουμε να βρούμε τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0, θα χρησιμοποιούμε τον ορισμό του παραγώγου αριθμού ή θα βρίσκουμε την f' και στη συνέχεια την τιμή $f'(x_0)$.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2-2x$. **Να βρεθεί ο παράγωγος αριθμός** $f'(2)$.

Λύση:

α' τρόπος: Είναι $f'(2)=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x^2-2x)-0}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$$

β' τρόπος: Είναι $f'(x)=(x^2-2x)'=(x^2)'-(2x)'=2x-2 \Longrightarrow f'(x)=2x-2$.

Άρα: $f'(2)=2\cdot2-2=2$.

3. Οι συναρτήσεις με τύπο $f(x)=\sqrt[\nu]{[g(x)]^{\mu}}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, $\mu\in\mathbb{Z}^*$, παραγωγίζονται ως εξής:

Γράφουμε $f(x)=[g(x)]^{\frac{\mu}{\nu}}$, οπότε είναι $f'(x)=\dfrac{\mu}{\nu}[g(x)]^{\frac{\mu}{\nu}-1}g'(x)$.

Παράδειγμα:

Να παραγωγισθεί η f με $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$.

Λύση: Είναι $f(x)=(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$, οπότε:

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{2}{3}-1}(x^2+1)'=\frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}2x$$

4. Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, θα βρίσκουμε την παράγωγο στα ανοικτά διαστήματα του πεδίου ορισμού με τους κανόνες παραγώγισης, ενώ στα άκρα των κλειστών διαστημάτων, που αντιστοιχούν διαφορετικοί τύποι θα βρίσκουμε την παράγωγο με τον ορισμό.

Παράδειγμα:

Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \forall x\in(-\infty,0)\\ 1-x, & \forall x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

Λύση: Είναι: $f'(x)=(1+x)'=1 \quad \forall x\in(-\infty,0)$

$$f'(x)=(1-x)'=-1 \quad \forall x\in(0,+\infty)$$

Θα βρούμε την παράγωγο της f στο σημείο $x=0$. Επειδή αριστερά και δεξιά του 0 η f ορίζεται με διαφορετικούς τύπους, θα βρούμε χωριστά την $f'_{\alpha}(0)$ και την $f'_{\delta}(0)$. Είναι:

$$f'_{\alpha}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1+x-1}{x}=1$$

$$f'_{\delta}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x-1}{x}=-1$$

Επειδή $f'_{\alpha}(0)\neq f'_{\delta}(0)$, δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός στο 0. Έτσι είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x<0\\ -1, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

5. Αν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει απόλυτες τιμές παραστάσεων του x ή ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού (ή δίνεται με διάφορες άλλες εκφράσεις), τότε για να βρούμε την παράγωγό της μετασχηματίζουμε τον τύπο της σε πολλαπλό. Στη συνέχεια εργαζόμαστε σύμφωνα με την προηγούμενη μέθοδο.

Παραδείγματα:

1. **Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f, με** $f(x)=|x-3|$.

Λύση: Μετασχηματίζουμε τον τύπο της f σε πολλαπλό. Έτσι έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & \forall x\in(-\infty,3]\\ x-3 & \forall x\in[3,+\infty)\end{cases}$$

Παράγωγος στο $(-\infty,3)$: Είναι $f'(x)=-1$.

Παράγωγος στο $(3,+\infty)$: Είναι $f'(x)=1$.

Παράγωγος στο 3: Είναι:

$$f'_{\alpha}(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(-1)=-1$$

$$f'_{\delta}(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}1=1$$

Επειδή $f'_{\alpha}(3)\neq f'_{\delta}(3)$ δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός στο 3.

2. Να παραγωγισθεί η f, με $f(x)=x-[x]$.

Λύση: Είναι:
$$f(x)=\begin{cases} x-(\kappa-1) & \forall x\in[\kappa-1,\kappa) \\ x-\kappa & \forall x\in[\kappa,\kappa+1)\end{cases}\quad \kappa\in Z$$

Επομένως $f'(x)=1$ $\forall x\in[\kappa-1,\kappa)$ και $f'(x)=1$ $\forall x\in(\kappa,\kappa+1)$. Θα βρούμε την παράγωγο στο κ. Είναι:

$$f'_{\delta}(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^+}\frac{f(x)-f(\kappa)}{x-\kappa}=\lim_{x\to\kappa^+}\frac{x-\kappa-0}{x-\kappa}=\lim_{x\to\kappa^+}1=1 \quad \text{και}$$

$$f'_{\alpha}(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^-}\frac{f(x)-f(\kappa)}{x-\kappa}=\lim_{x\to\kappa^-}\frac{x-(\kappa-1)-0}{x-\kappa}=\lim_{x\to\kappa^-}\frac{x-\kappa+1}{x-\kappa}=\lim_{x\to\kappa^-}\frac{x-\kappa}{x-\kappa}+\lim_{x\to\kappa^-}\frac{1}{x-\kappa}=$$

$$=\lim_{x\to\kappa^-}1+(-\infty)=1+(-\infty)=-\infty$$

Άρα δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός στο κ.

> 6. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δείχνουμε ότι δεν υπάρχει (ή δεν είναι πεπερασμένο) το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
> Πιο εύκολα μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Σχηματίζουμε την f' και δείχνουμε ότι δεν ορίζεται στο x_0. Μπορούμε ακόμα να δείξουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f, με $f(x)=|x-1|$, στο σημείο $x_0=1$.

Απόδειξη: Είναι:

$$f'_{\alpha}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1$$

και: $$f'_{\delta}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}1=1$$

Επειδή $f'_{\alpha}(1)\neq f'_{\delta}(1)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

2. Να δειχθεί ότι ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=1+(x+2)^{\frac{2}{3}}$$

στο σημείο -2 δεν υπάρχει.

Απόδειξη: Είναι:

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}=\frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$$

δηλαδή: $$f'(x)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$$

Από την μορφή της $f'(x)$ φαίνεται ότι δεν ορίζεται για $x=-2$, άρα δεν υπάρχει ο $f'(-2)$.

> 7. Το πεδίο ορισμού της f' είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Επομένως για να βρούμε το πεδίο ορισμού της f', βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και εξετάζουμε για ποια στοιχεία του ορίζεται η f'.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f', όταν η f έχει τύπο $f(x)=\sqrt{x-2}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[2,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{(x-2)'}{2\sqrt{x-2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f' είναι το $(2,+\infty)$.

> 8. Για να παραγωγίσουμε συναρτήσεις της μορφής $h(x)=g(x)^{\sigma(x)}$, θα ακολουθούμε μια από τις επόμενες μεθόδους:
>
> **Μέθοδος 1:** Είναι $h(x)=g(x)^{\sigma(x)} \overset{*}{\Longleftrightarrow} h(x)=e^{\ln g(x)^{\sigma(x)}} \Longleftrightarrow$
> $\Longleftrightarrow h(x)=e^{\sigma(x)\ln g(x)}$
>
> Άρα:
> $h'(x)=e^{\sigma(x)\ln g(x)}[\sigma(x)\ln g(x)]'=e^{\sigma(x)\ln g(x)}\left[\sigma'(x)\ln g(x)+\sigma(x)\frac{1}{g(x)}g'(x)\right]$
>
> **Μέθοδος 2:** Είναι:
> $h(x)=g(x)^{\sigma(x)} \Longleftrightarrow \ln h(x)=\ln g(x)^{\sigma(x)} \Longleftrightarrow \ln h(x)=\sigma(x)\ln[g(x)]$
> Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:
> $\frac{1}{h(x)}h'(x)=[\sigma(x)\ln g(x)]' \Longleftrightarrow h'(x)=h(x)\left[\sigma'(x)\ln g(x)+\sigma(x)\frac{1}{g(x)}g'(x)\right]$

* Είναι γνωστό ότι: $\phi=\omega^x \Longleftrightarrow \phi=a^{\log_a\omega^x} \Longleftrightarrow \phi=a^{x\log_a\omega}$

Παραδείγματα:

1. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}$.**

Λύση: Είναι: $f(x)=e^{\ln(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}} \Longleftrightarrow f(x)=e^{\varepsilon\varphi x\ln\eta\mu x} \Longrightarrow$

$$f'(x)=e^{\varepsilon\varphi x\ln\eta\mu x}(\varepsilon\varphi x\ln\eta\mu x)' \Longleftrightarrow f'(x)=(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ln\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\frac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'\right]$$

$$\Longleftrightarrow f'(x)=(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ln\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)$$

'Αρα: $$f'(x)=(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ln\eta\mu x+1\right)$$

2. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^x$.**

Λύση: Είναι: $\ln f(x)=\ln x^x \Longleftrightarrow \ln f(x)=x\ln x \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{1}{f(x)}f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)' \Longleftrightarrow f'(x)=f(x)[\ln x+1] \Longleftrightarrow f'(x)=x^x[\ln x+1]$$

3. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=e^{x^x}$.**

Λύση: Είναι: $\ln f(x)=x^x\ln e \Longleftrightarrow \ln f(x)=e^{\ln x^x}\ln e \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \ln f(x)=e^{x\ln x}\ln e \Longleftrightarrow \ln f(x)=e^{x\ln x} \xrightarrow{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma.} \frac{1}{f(x)}f'(x)=(e^{x\ln x})' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f'(x)=f(x)\left[e^{x\ln x}(x\ln x)'\right] \Longleftrightarrow f'(x)=e^{x^x}\left[x^x\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)\right]$$

'Αρα: $$f'(x)=e^{x^x}(\ln x+1)x^x$$

> 9. Για να δείξουμε μια ισότητα ή ανισότητα μεταξύ των τιμών συναρτήσεων σ' ένα σημείο x και των παραγώγων τους στο x, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους των παραγωγίσεων σε συνδυασμό με τις αποδεικτικές μεθόδους στις ισότητες ή ανισότητες.

Παράδειγμα:

Αν f και g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R και ισχύει:

$$\frac{1}{f(x)}+g(x)=e^x \qquad (1)$$

με $f'(1)=g'(1)=1$, να δειχθεί ότι $f^2(1)(e-1)+1=0$.

Απόδειξη: Είναι: $\frac{1}{f(x)}+g(x)=e^x \Longrightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)}+g'(x)=e^x \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow -f'(x)+f^2(x)g'(x)=e^x f^2(x) \xrightarrow{x=1} -f'(1)+f^2(1)g'(1)=ef^2(1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -1+f^2(1)=f^2(1)e \Longleftrightarrow f^2(1)(e-1)+1=0$$

> 10. Ονομάζεται διαφορική εξίσωση, μια εξίσωση της μορφής:
>
> $$F(x,\psi,\psi',\ldots,\psi^{(\nu)})=0$$
>
> με άγνωστο τη συνάρτηση $\psi=f(x)$. Ο τρόπος λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης ξεφεύγει από τα πλαίσια του βιβλίου αυτού. Υπάρχουν, όμως, ασκήσεις που δίνεται μια διαφορική εξίσωση και μια λύση της και ζητείται να γίνει η επαλήθευσή της. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο εργασίας.

Παράδειγμα:

Αν $\psi=f(x)=x^3+2$, τότε είναι $3\psi'-\psi\psi''x-4\psi'''=-6x^5-3x^2-24$.

Λύση: Είναι $\psi'=3x^2$, $\psi''=6x$, $\psi'''=6$. 'Αρα:

$$3\psi'-\psi\psi''x-4\psi'''=9x^2-(6x^5+12x^2)-24=9x^2-6x^5-12x^2-24=-6x^5-3x^2-24$$

> 11. Αν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση μιας συνάρτησης f και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 και θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση παραγωγίζεται, τότε:
>
> Από τη σχέση $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θα προσπαθούμε να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση f: R ⟶ R, με $f(x+\psi)=f(x)f(\psi)$ (1), $\forall x,\psi\in$ R, αν $f'(0)=1$ και $f(x)\neq 0$ $\forall x\in$ R, τότε η f παραγωγίζεται.

Απόδειξη: Είναι $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ (2)

(Η (1) για $x=\psi=0$, δίνει $f(0)=f(0)f(0) \Longrightarrow f(0)=1$). 'Εχουμε:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\overset{(2)}{=}f(x)f'(0)$$

'Αρα $f'(x)=f(x)f'(0)$. Επειδή $f(x)f'(0)$ είναι πραγματικός αριθμός $\forall x\in$ **R**, η f παραγωγίζεται στο **R**.

> 12. Εφαρμογή της παραγώγου έχουμε και σε πολλές ασκήσεις με συνάρτηση πολυώνυμο. Σχετικά αναφέρονται στη σελίδα 77.

> 13. Για να βρούμε τη ν-στής τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης, βρίσκουμε τις παραγώγους μερικών τάξεων 1ης, 2ης, κλπ. Βρίσκουμε, αν είναι εύ-

κολο τη μορφή της ν-στής τάξης παραγώγου και τον τύπο της αποδεiχνουμε με επαγωγή.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η ν-στής τάξης παράγωγος της συνάρτησης f, με $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in R^*$.

Λύση: Εχουμε $f'(x)=(e^{\alpha x})'=e^{\alpha x}(\alpha x)'=\alpha e^{\alpha x}$, δηλαδή $f'(x)=\alpha e^{\alpha x}$. Είναι ακόμα

$$f''(x)=(\alpha e^{\alpha x})'=\alpha' e^{\alpha x}+\alpha(e^{\alpha x})'=0+\alpha^2 e^{\alpha x}$$

δηλαδή $f''(x)=\alpha^2 e^{\alpha x}$ και $f'''(x)=\alpha^3 e^{\alpha x}$. 'Ισως λοιπόν είναι:

$$f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu} e^{\alpha x} \quad (1)$$

Θα δείξουμε την (1) επαγωγικά. Για ν=1 έχουμε ότι $(e^{\alpha x})'=(\alpha x)'(e^{\alpha x})=\alpha e^{\alpha x}$, που ισχύει. 'Εστω ότι για ν=κ η (1) ισχύει, δηλαδή ισχύει:

$$(e^{\alpha x})^{(\kappa)}=\alpha^{\kappa} e^{\alpha x} \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει για ν=κ+1, δηλαδή ότι:

$$(e^{\alpha x})^{(\kappa+1)}=\alpha^{\kappa+1} e^{\alpha x} \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας τη (2) έχουμε:

$$\left[(e^{\alpha x})^{(\kappa)}\right]'=(e^{\alpha x})^{(\kappa+1)}=\alpha^{\kappa} e^{\alpha x}(\alpha x)'=\alpha^{\kappa}\alpha e^{\alpha x}=\alpha^{\kappa+1} e^{\alpha x}$$

Επομένως η (3) ισχύει. 'Αρα είναι:

$$f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu} e^{\alpha x} \quad \forall \nu \in N^*$$

14. Η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μας διευκολύνει στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας, διότι μας δίνει τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$ του διαγράμματος μιας συνάρτησης f.

Παραδείγματα:

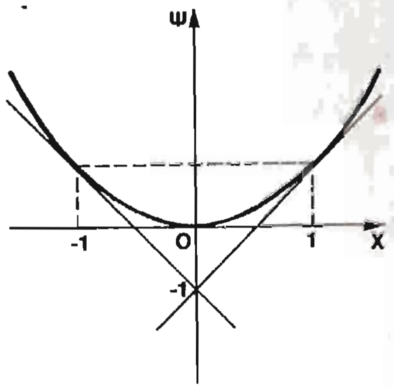
1. Αν C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, με $f(x)=x^2-x$, να βρεθεί η ευθεία που εφάπτεται της C στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$.

Λύση: Είναι $x_o=1$, $f(x_o)=0$ και $f'(x_o)=2x_o-1=2\cdot1-1=1$. 'Αρα η ζητούμενη ευθεία είναι $\psi-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \iff \psi-0=1(x-1) \iff \psi=x-1$.

2. Αν C είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x)=x^2$, να βρεθούν οι ευθείες $\psi=\lambda x-1$, οι οποίες εφάπτονται της C και να δειχθεί ότι τέμνονται σ' ένα σημείο του άξονα ψ'ψ.

Λύση: 'Εστω ότι (x_o,ψ_o) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου επαφής, τότε θα έχουμε: $\psi_o=x_o^2$ (1) και $\psi_o=\lambda x_o-1$ (2)

Είναι $f'(x_o)=2x_o$, συνεπώς ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης είναι: $\lambda=2x_o$ (3)



Από το σύστημα των (1), (2), (3) βρίσκουμε:

$(x_o=1,\psi_o=1,\lambda=2)$ ή $(x_o=-1,\psi_o=1,\lambda=-2)$

'Αρα οι ζητούμενες ευθείες είναι:

η $\psi=2x-1$ που εφάπτεται της C στο (1,1)

η $\psi=-2x-1$ που εφάπτεται της C στο (-1,1)

Το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}\psi=2x-1\\ \psi=-2x-1\end{array}\right\}$ δίνει:

$(x=0\ ,\ \psi=-1)$

που είναι το κοινό σημείο των δυο ευθειών. Το σημείο M(0,-1) είναι σημείο του άξονα ψ'ψ.

15. Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_o μπορούμε να βρίσκουμε όρια συναρτήσεων.

Παράδειγμα:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=\alpha$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$, x>0, α>0.

Λύση:

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{[f(x)-f(\alpha)][f(x)+f(\alpha)]\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}{(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+f(\alpha)]\lim\limits_{x\to\alpha}(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})=f'(\alpha)\left[\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)+f(\alpha)\right]\left[\lim\limits_{x\to\alpha}\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right]\overset{*}{=}$

$=f'(\alpha)\left[f(\alpha)+f(\alpha)\right]\left[\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}\right]=f'(\alpha)2f(\alpha)2\sqrt{\alpha}=4f'(\alpha)f(\alpha)\sqrt{\alpha}$.

---

* Επειδή η f είναι συνεχής στο α είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο παράγωγος αριθμός των συναρτήσεων f και g, με $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=\frac{2}{3x^2+4}$, στα σημεία $x_0=-2$ και $x_0=1$, αντίστοιχα.

Λύση:

α) Είναι: $\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \frac{x^2-x-6-(-2)^2+(-2)+6}{x+2} = \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} = x-3$

Επομένως: $f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}(x-3)=-5$

β) Είναι: $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{\frac{2}{3x^2+4}-\frac{2}{3\cdot1^2+4}}{x-1} = \frac{-6(x-1)(x+1)}{7(x-1)(3x^2+4)} = \frac{-6(x+1)}{7(3x^2+4)}$

Άρα: $g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[\frac{-6(x+1)}{7(3x^2+4)}\right]=-\frac{12}{49}$

2. Να δειχθεί με τον ορισμό ότι η συνάρτηση f, με $f(x)=|x-1|+2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Απόδειξη: Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{αν } x\geq1 \\ -x+3, & \text{αν } x<1\end{cases}$$

Επειδή αριστερά και δεξιά του $x_0=1$, η f ορίζεται με διαφορετικούς τύπους, για να υπολογίσουμε το $f'(1)$ θα εργαστούμε με πλευρικά όρια, δηλαδή θα υπολογίσουμε τους $f'_\alpha(1)$, $f'_\delta(1)$. Έτσι έχουμε:

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$f'_\alpha(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x+3-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

Επειδή $f'_\delta(1)\neq f'_\alpha(1)$, δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(1)$.

3. Δίνεται η f, με $f(x)=x[x]$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο παράγωγος αριθμός στο σημείο $x=0$.

Λύση: Έχουμε:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x[x]-0}{x}=\lim_{x\to0^-}[x]=-1$$

Είναι ακόμα $f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x[x]-0}{x}=\lim_{x\to0^+}[x]=0$

Επειδή $f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)$, δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο σημείο $x=0$.

4. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f, με $f(x)=3x|x|$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο σημείο $x_0=0$.

Λύση: Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} -3x^2, & \forall x\in(-\infty,0) \\ 3x^2, & \forall x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

Αν $x>0$, τότε $f'(x)=6x$. Αν $x<0$, τότε $f'(x)=-6x$. Είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{3x|x|-0}{x}=3\lim_{x\to0}|x|=0$$

οπότε είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} -6x, & \forall x\in(-\infty,0) \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ 6x, & \forall x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Είναι:

$$f'_\alpha{}'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-6x-0}{x}=-6$$

$$f'_\delta{}'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{6x-0}{x}=6$$

Επειδή $f'_\alpha{}'(0)\neq f'_\delta{}'(0)$, η f' δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5. Να βρεθούν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \forall x\in[-1,1] \\ x^4, & \forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

Λύση: Αν $x\in(-1,1)$ είναι $f'(x)=3x^2$ και αν $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=4x^3$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-1$.

Έχουμε: $f'_\alpha(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)=3$

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^3+x^2+x+1)=4$$

Επειδή $f'_\alpha(1)\neq f'_\delta(1)$, δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο 1. Είναι ακόμα:

$$f'_\alpha(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^4+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{2}{x+1}\right)=-\infty$$

$$f'_\delta(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}(x^2-x+1)=3$$

Επειδή $f'_\alpha(-1)\neq f'_\delta(-1)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1.

Άρα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & \text{αν } x\in(-1,1) \\ 4x^3, & \text{αν } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 6x, & \text{αν } x\in(-1,1) \\ 12x^2, & \text{αν } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

6. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x)=8x^4+3x^3+x^2+x+1$, **δ)** $f(x)=(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x$,

β) $f(x)=(2x+1)(x^2+3)$, **ε)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$,

γ) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$, **στ)** $f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=(8x^4+3x^3+x^2+x+1)'=(8x^4)'+(3x^3)'+(x^2)'+x'+1'=$
$=32x^3+9x^2+2x+1.$

β) $f'(x)=[(2x+1)(x^2+3)]'=(2x+1)'(x^2+3)+(2x+1)(x^2+3)'=2(x^2+3)+(2x+1)$

γ) $f'(x)=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}\right)'=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x)'x^3-(\sigma\upsilon\nu x)(x^3)'}{(x^3)^2}=\dfrac{(-\eta\mu x)x^3-3x^2\sigma\upsilon\nu x}{x^6}$

δ) $f'(x)=[(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x]'=(x^2+1)'(x^3+1)(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x+$
$+(x^2+1)(x^3+1)'(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x+(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)'\sigma\upsilon\nu x+(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)(\sigma\upsilon\nu x)'=$
$=2x(x^3+1)(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x+(x^2+1)3x^2(x^4+1)\sigma\upsilon\nu x+(x^2+1)(x^3+1)4x^3\sigma\upsilon\nu x+$
$+(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)(-\eta\mu x)$

ε) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)'=\dfrac{(\ln x)'x^2-(\ln x)(x^2)'}{x^4}=\dfrac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}$

στ) $f'(x)=(e^x\sigma\upsilon\nu x)'=(e^x)'\sigma\upsilon\nu x+e^x(\sigma\upsilon\nu x)'=e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x$

7. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις f, με τύπους:

α) $f(x)=\ln\sqrt[5]{1+3x^2}$, **δ)** $f(x)=\sqrt[5]{3x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3x}}$,

β) $f(x)=\ln\left[\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{3}\right)\right]$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, **ε)** $f(x)=\eta\mu(x^2+x)^8$,

γ) $f(x)=\ln(\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x))$, **στ)** $f(x)=\ln e^{\eta\mu x}+\sqrt{x^2-25x}$,

Λύση:

α) Έχουμε $f(x)=\frac{1}{5}\ln(1+3x^2)$, οπότε:

$$f'(x)=\frac{1}{5}\,\frac{(1+3x^2)'}{1+3x^2}=\frac{6x}{5(1+3x^2)}$$

β) Είναι: $$f'(x)=\frac{\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)\right]'}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)}=\frac{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)'}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)}$$

γ) $f'(x)=\dfrac{1}{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)]'=\dfrac{1}{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}[\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)](\sigma\upsilon\nu x)'=$

$$=\frac{1}{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}[\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)](-\eta\mu x)$$

δ) $f(x)=(3x^2)^{\frac{1}{5}}-\dfrac{1}{(3x)^{\frac{1}{2}}}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{5}(3x^2)^{\frac{1}{5}-1}(3x^2)'+\dfrac{\left[(3x)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\left[(3x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}=$

$$=\frac{1}{5}(3x^2)^{-\frac{4}{5}}6x+\frac{\frac{1}{2}(3x)^{\frac{1}{2}-1}(3x)'}{3x}=\frac{1}{5}\,\frac{6x}{(3x^2)^{\frac{4}{5}}}+\frac{\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}}{3x}=$$

$$=\frac{1}{5}\,\frac{6x}{\sqrt[5]{(3x^2)^4}}+\frac{1}{2\sqrt{3x}\,x}$$

ε) $f'(x)=[\sigma\upsilon\nu(x^2+x)^8][(x^2+x)^8]'=[\sigma\upsilon\nu(x^2+x)^8]8(x^2+x)^7(x^2+x)'=$
$=8(x^2+x)^7(2x+1)\sigma\upsilon\nu(x^2+x)^8$

στ) $f(x)=\eta\mu x\ln e+\sqrt{x^2-25x}\iff f(x)=\eta\mu x+\sqrt{x^2-25x}$. Είναι:

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+\frac{(x^2-25x)'}{2\sqrt{x^2-25x}}\Longrightarrow f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+\frac{2x-25}{2\sqrt{x^2-25x}}$$

8. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις f, με τύπους:

α) $f(x)=|x-2|+x$, **β)** $f(x)=3|x|+2$, **γ)** $f(x)=x+|x^2-x|$

Λύση:

α) Είναι $f(x)=\begin{cases} -x+2+x, & \forall x\in(-\infty,2] \\ x-2+x, & \forall x\in(2,+\infty) \end{cases}\iff f(x)=\begin{cases} 2, & \forall x\in(-\infty,2] \\ 2x-2, & \forall x\in(2,+\infty) \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)$, με παράγωγο $f'(x)=(2)'=0$ και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=(2x-2)'=2$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Είναι: $f'_{\alpha}(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}0=0$

και: $f'_{\delta}(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(2x-2)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}2=2$

Επειδή $f'_\alpha(2) \neq f'_\delta(2)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

β) Είναι $$f(x)=\begin{cases} -3x+2, & \forall x \in (-\infty,0] \\ 3x+2, & \forall x \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$, με παράγωγο $f'(x)=(-3x+2)'=-3$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με παράγωγο $f'(x)=(3x+2)'=3$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x+2-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-3)=-3$$

και: $$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+2-2}{x}=\lim_{x\to 0^+}3=3$$

Επειδή $f'_\alpha(0) \neq f'_\delta(0)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Ο τύπος της f γράφεται: $$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in (-\infty,0] \cup [1,+\infty) \\ -x^2+2x, & \text{αν } x \in (0,1) \end{cases}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=2x$ και στο $(0,1)$, με παράγωγο $f'(x)=-2x+2$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το 1. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=0$$

και: $$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x+2)=2$$

Επειδή $f'_\alpha(0) \neq f'_\delta(0)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμοια έχουμε:

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

και: $$f'_\alpha(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}[-(x-1)]=0$$

Επειδή $f'_\alpha(1) \neq f'_\delta(1)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbf{R}-\{0,1\}$.

9. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x)=(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu 2x}$, β) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, γ) $f(x)=(\eta\mu x)^x$, δ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(x^x)$

Λύση:

α) Έχουμε $f(x)=(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu 2x} \Longrightarrow \ln f(x)=\eta\mu 2x \ln\sigma\upsilon\nu x$. Παραγωγίζοντας προκύπτει: $$(\ln f(x))'=2\sigma\upsilon\nu 2x\ln\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=2\sigma\upsilon\nu 2x\ln\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu 2x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Longleftrightarrow f'(x)=f(x)(2\sigma\upsilon\nu 2x\ln\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2 x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu 2x}2(\sigma\upsilon\nu 2x\ln\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x)$$

β) Έχουμε: $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Longleftrightarrow \ln f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Παραγωγίζοντας προκύπτει: $$[\ln f(x)]'=(x)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \Longleftrightarrow f'(x)=f(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

γ) Είναι $f(x)=(\eta\mu x)^x \Longrightarrow \ln f(x)=\ln(\eta\mu x)^x \Longrightarrow \ln f(x)=x\ln(\eta\mu x) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (\ln f(x))'=(x\ln(\eta\mu x))' \Longrightarrow \frac{1}{f(x)}f'(x)=x'\ln(\eta\mu x)+x[\ln(\eta\mu x)]' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(x)=f(x)\left[\ln(\eta\mu x)+x\frac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'\right] \Longrightarrow f'(x)=f(x)\left[\ln(\eta\mu x)+x\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(x)=(\eta\mu x)^x[\ln(\eta\mu x)+x\sigma\varphi x]$$

δ) Είναι: $$f'(x)=[-\eta\mu(x^x)(x^x)'] \quad (1)$$

Είδαμε ότι: $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$. Άρα η (1) γράφεται: $$f'(x)=[-\eta\mu(x^x)]x^x(1+\ln x)$$

10. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις f, με τύπους:

α) $f(x)=|\eta\mu x|$, β) $f(x)=\eta\mu|x|$, γ) $f(x)=|\varepsilon\varphi x|$

Λύση:

α) Ο τύπος της f γράφεται: $$f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & \text{αν } x \in [2\kappa\pi,2\kappa\pi+\pi] \\ -\eta\mu x, & \text{αν } x \in [2\kappa\pi+\pi,2\kappa\pi+2\pi], \end{cases} \quad \kappa \in \mathbf{Z}$$

Για κάθε $x \in (2\kappa\pi,2\kappa\pi+\pi)$ είναι $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.
Για κάθε $x \in (2\kappa\pi+\pi,2\kappa\pi+2\pi)$ είναι $f'(x)=(-\eta\mu x)'=-\sigma\upsilon\nu x$.
Θα εξετάσουμε την παράγωγο της f στα άκρα των διαστημάτων. Είναι:

$$f'_\alpha(2\kappa\pi+\pi)=\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1 \quad \text{και} \quad f'_\delta(2\kappa\pi+\pi)=-\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\pi)=-\sigma\upsilon\nu\pi=1$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη η f, στο $2\kappa\pi+\pi$. Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχουν οι παράγωγοι αριθμοί στα άλλα άκρα των διαστημάτων.

β) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu(-x), & \forall x \in (-\infty,0] \\ \eta\mu x, & \forall x \in [0,+\infty) \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\begin{cases} -\eta\mu x, & \forall x \in (-\infty,0] \\ \eta\mu x, & \forall x \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Για κάθε $\chi \in (-\infty,0)$ είναι $f'(\chi)=-\sigma\upsilon\nu\chi$.

Για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$ είναι $f'(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$.

Αν $\chi=0$ τότε: $$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to 0^-} \frac{-\eta\mu\chi+\eta\mu 0}{\chi-0} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = -1$$

και $$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu\chi - \eta\mu 0}{\chi - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$$

Επειδή $f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)$, δεν υπάρχει ο $f'(0)$.

γ) Είναι $$f(\chi)=\begin{cases} \varepsilon\varphi\chi, & \forall \chi \in \left[\kappa\pi,\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right) \\ -\varepsilon\varphi\chi, & \forall \chi \in \left(\kappa\pi+\frac{\pi}{2},(\kappa+1)\pi\right], \quad \kappa\in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Για κάθε $\chi \in \left(\kappa\pi,\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\chi)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$.

Για κάθε $\chi \in \left(\kappa\pi+\frac{\pi}{2},(\kappa+1)\pi\right]$ είναι $f'(\chi)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$.

Εύκολα δείχνεται ότι δεν υπάρχουν παράγωγοι στα άκρα των διαστημάτων.

11. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις f με τύπους:

α) $f(\chi)=[\chi]$, β) $f(\chi)=\sqrt{\chi-[\chi]}$

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το **R**. Είναι:

$$f(\chi)=\begin{cases} \kappa-1, & \forall \chi \in [\kappa-1,\kappa) \\ \kappa, & \forall \chi \in [\kappa,\kappa+1), \quad \kappa\in Z \end{cases}$$

Άρα $f'(\chi)=0$, $\forall\chi \in (\kappa-1,\kappa)$ και $f'(\chi)=0$, $\forall\chi\in(\kappa,\kappa+1)$. Θα εξετάσουμε αν η f παραγωγίζεται στο κ. Είναι:

$$f'_\alpha(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^-} \frac{f(\chi)-f(\kappa)}{\chi-\kappa} = \lim_{x\to\kappa^-} \frac{\kappa-1-\kappa}{\chi-\kappa} = -\lim_{x\to\kappa^-} \frac{1}{\chi-\kappa} = -(-\infty)=+\infty$$

$$f'_\delta(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^+} \frac{f(\chi)-f(\kappa)}{\chi-\kappa} = \lim_{x\to\kappa^+} \frac{\kappa-\kappa}{\chi-\kappa} = \lim_{x\to\kappa^+} 0 = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο κ.

β) Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το **R**. Πράγματι πρέπει:

$$\chi-[\chi]\geq 0 \iff \chi\geq[\chi]$$

που ισχύει $\forall\chi\in\mathbf{R}$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(\chi)=\begin{cases} \sqrt{\chi-(\kappa-1)}, & \forall\chi\in[\kappa-1,\kappa) \\ \sqrt{\chi-\kappa}, & \forall\chi\in[\kappa,\kappa+1), \quad \kappa\in Z \end{cases}$$

Είναι: $$f'(\chi)=\frac{[\chi-(\kappa-1)]'}{2\sqrt{\chi-(\kappa-1)}} = \frac{1}{2\sqrt{\chi-(\kappa-1)}}, \quad \forall\chi\in(\kappa-1,\kappa)$$

και: $$f'(\chi)=\frac{(\chi-\kappa)'}{2\sqrt{\chi-\kappa}} = \frac{1}{2\sqrt{\chi-\kappa}}, \quad \forall\chi\in(\kappa,\kappa+1)$$

Θα εξετάσουμε την παράγωγο στο κ. Είναι:

$$f'_\delta(\kappa)=\lim_{x\to\kappa^+} \frac{f(\chi)-f(\kappa)}{\chi-\kappa} = \lim_{x\to\kappa^+} \frac{\sqrt{\chi-\kappa}}{\chi-\kappa} = \lim_{x\to\kappa^+} \sqrt{\frac{\chi-\kappa}{(\chi-\kappa)^2}} = \lim_{x\to\kappa^+} \sqrt{\frac{1}{\chi-\kappa}} = +\infty$$

Εφόσον $f'_\delta(\kappa)=+\infty$, δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο κ.

12. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και f', όταν:

α) $f(\chi)=\frac{1}{\chi-2}$, β) $f(\chi)=\sqrt{\chi^2-4}$, γ) $f(\chi)=\frac{1}{|\chi|}$, δ) $f(\chi)=\sqrt{\chi-2}$

Λύση:

α) Έχουμε: $$f'(\chi)=\frac{1'(\chi-2)-1(\chi-2)'}{(\chi-2)^2} = \frac{-1}{(\chi-2)^2} \implies f'(\chi)=-\frac{1}{(\chi-2)^2}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{D}(f)=\mathbf{R}-\{2\}$ και ότι για κάθε $\chi\in\mathbf{R}-\{2\}$, η f' ορίζεται, επομένως $\mathcal{D}(f')=\mathbf{R}-\{2\}$.

β) Είναι: $$f'(\chi)=\frac{(\chi^2-4)'}{2\sqrt{\chi^2-4}} \iff f'(\chi)=\frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2-4}} \iff f'(\chi)=\frac{\chi}{\sqrt{\chi^2-4}}$$

Η f ορίζεται για $\chi^2-4\geq 0$, δηλαδή για $\chi\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Άρα:

$$\mathcal{D}(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

Από τις τιμές του $\mathcal{D}(f)$ εξαιρούμε εκείνες για τις οποίες δεν ορίζεται η f', δηλαδή τις τιμές 2 και -2. Έτσι είναι:

$$\mathcal{D}(f')=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

γ) Είναι $\mathcal{D}(f)=\mathcal{R}-\{0\}$ και:

$$f(\chi)=\begin{cases} \frac{1}{-\chi}, & \forall\chi\in(-\infty,0) \\ \frac{1}{\chi}, & \forall\chi\in(0,+\infty) \end{cases}$$

Θα βρούμε την f'. Η f παραγωγίζεται στο $(-\infty,0)$ και είναι:

$$\left(-\frac{1}{\chi}\right)' = \frac{1}{\chi^2}$$

Η f παραγωγίζεται στο $(0,+\infty)$ και είναι:

$$\left(\frac{1}{\chi}\right)' = -\frac{1}{\chi^2}$$

Παρατηρούμε ότι $\forall\chi\in\mathcal{D}(f)=\mathbf{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η f' ορίζεται, άρα $\mathcal{D}(f')=\mathbf{R}-\{0\}$.

δ) Για να ορίζεται η f πρέπει $\chi-2\geq 0 \iff \chi\geq 2 \iff \chi\in[2,+\infty)$. Άρα:

$$\mathcal{D}(f)=[2,+\infty)$$

Είναι: $$f'(\chi)=\frac{(\chi-2)'}{2\sqrt{\chi-2}} \Longrightarrow f'(\chi)=\frac{1}{2\sqrt{\chi-2}}$$

Παρατηρούμε ότι $\forall \chi\in(2,+\infty)$, η f' ορίζεται, άρα $\mathcal{D}(f')=(2,+\infty)$.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(\chi)=\sqrt{\chi}\,(1-\text{συν}\chi)$, $\forall \chi\in[0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι $f'_{\delta}(0)=0$.

Απόδειξη: Έχουμε $$f'_{\delta}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\chi)}{\chi}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\chi}\,(1-\text{συν}\chi)}{\chi}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\chi}\,\eta\mu^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\chi}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu\frac{\chi}{2}}{\frac{\chi}{2}}\sqrt{\chi}\,\eta\mu\frac{\chi}{2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\frac{\chi}{2}}{\frac{\chi}{2}}\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\chi}\,\eta\mu\frac{\chi}{2}\right)=1\cdot 0=0$$

Άρα $f'_{\delta}(0)=0$.

****14. α) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β). Υποθέτουμε ότι $\chi_0\in(\alpha,\beta)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση φ, με**

$$\varphi(\chi)=\begin{cases} f(\chi), & \forall \chi\in(\alpha,\chi_0)\\ g(\chi), & \forall \chi\in[\chi_0,\beta)\end{cases}$$

I) Αν $f(\chi_0)=g(\chi_0)$ και $f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$, να δειχθεί ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0.

II) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε $f(\chi_0)=g(\chi_0)$ και $f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$.

β) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, ώστε η συνάρτηση φ με:

$$\varphi(\chi)=\begin{cases} \alpha(\chi+1), & \forall \chi\in(-3,0)\\ 2e^{\beta\chi}, & \forall \chi\in[0,4)\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Caseta Matematica)

Απόδειξη:

α) I) Έστω $f(\chi_0)=g(\chi_0)$ (1) και $f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$ (2). Έχουμε:

$$\varphi'_{\alpha}(\chi_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(\chi)-\varphi(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=f'_{\alpha}(\chi_0)=$$

$$=f'(\chi_0) \quad (3)$$

$$\varphi'_{\delta}(\chi_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(\chi)-\varphi(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=g'_{\delta}(\chi_0)=g'(\chi_0) \quad (4)$$

Από (2), (3) και (4) προκύπτει ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0, εφόσον υπάρχουν οι $\varphi'_{\alpha}(\chi_0)$ και $\varphi'_{\delta}(\chi_0)$ και είναι ίσες.

II) Έστω ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0. Τότε η φ είναι συνεχής

στο χ_0, οπότε $\lim_{x\to x_0^-}\varphi(\chi)=\lim_{x\to x_0^+}\varphi(\chi)=\varphi(\chi_0)$ ή $\lim_{x\to x_0^-}f(\chi)=\lim_{x\to x_0^+}g(\chi)=\varphi(\chi_0)$ (5)

Επειδή οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0, είναι συνεχείς στο χ_0. Επομένως: $\lim_{x\to x_0^-}f(\chi)=f(\chi_0)$ (6) και $\lim_{x\to x_0^+}g(\chi)=g(\chi_0)$ (7)

Από (5), (6) και (7), προκύπτει ότι:

$$f(\chi_0)=g(\chi_0) \quad (8)$$

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, είναι:

$$\varphi'_{\alpha}(\chi_0)=\varphi'_{\delta}(\chi_0) \iff \lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(\chi)-\varphi(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(\chi)-\varphi(\chi_0)}{\chi-\chi_0} \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0} \iff \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0} \iff f'_{\alpha}(\chi_0)=g'_{\delta}(\chi_0) \iff f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε ότι αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε:

$$f(\chi_0)=g(\chi_0) \quad \text{και} \quad f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$$

β) Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε και μόνο τότε, αν $f(0)=g(0)$ και $f'(0)=g'(0)$.

Είναι $f(\chi)=\alpha(\chi+1)$ και $g(\chi)=2e^{\beta\chi}$, $f'(\chi)=\alpha$, $g'(\chi)=2\beta e^{\beta\chi}$. Επομένως:

$$f(0)=g(0) \iff \alpha=2 \quad (1)$$

και: $$f'(0)=g'(0) \iff \alpha=2\beta \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι α=2 και β=1.

15. Δίνεται η συνάρτηση f, με $$f(\chi)=\begin{cases} \chi^2+\alpha\chi+\beta, & \forall \chi\in(-\infty,1]\\ \sqrt{\chi^2+3}, & \forall \chi\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Να προσδιοριστούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 1.

Λύση: Έχουμε $f'_{\alpha}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\chi^2+\alpha\chi+\beta-\alpha-\beta-1}{\chi-1}=\lim_{x\to 1^-}(\alpha+\chi+1)=\alpha+2$. Άρα:

$$f'_{\alpha}(1)=\alpha+2 \quad (1)$$

$$f'_{\delta}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\chi^2+3}-\alpha-\beta-1}{\chi-1} \quad (2)$$

Επειδή: $$\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{\chi^2+3}-\alpha-\beta-1)=1-\alpha-\beta \quad (3)$$

και $$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\chi-1}=+\infty \quad (4)$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $1-\alpha-\beta>0$. Τότε η (2) δυν. (3) και (4) δίνει $f'_{\delta}(1)=+\infty$. Άρα δεν υπάρχει ο f'(1).

β) $1-\alpha-\beta<0$. Τότε η (2) δυν. (3) και (4) δίνει $f'_{\delta}(1)=-\infty$. Άρα δεν υ-

υπάρχει ο $f'(1)$.

γ) $1-\alpha-\beta=0$, τότε $\alpha+\beta=1$ (5). Οπότε η (2) γράφεται:

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}-\alpha-\beta-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}$$

Άρα: $\qquad f'_\delta(1)=\frac{1}{2}\qquad(6)$

Από (1) και (6) προκύπτει ότι:

$$f'(1)=f'_\alpha(1)=f'_\delta(1)\Longrightarrow\alpha+2=\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}$$

Η (5) για $\alpha=-\frac{3}{2}$, δίνει $\beta=\frac{5}{2}$.

****16. α) Δίνεται η συνάρτηση f, με** $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x\le2\\ \alpha x+\beta, & \text{αν } x>2\end{cases}$

Να βρεθούν τα α,β ώστε να υπάρχει ο f΄(2).

β) Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η f με τύπο:

$$f(x)=e^{\lambda|x|+\mu},\quad \lambda,\mu\in R$$

να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x=0.

Λύση:

α) Θέλουμε να υπάρχει ο $f'(2)$, άρα θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο 2. Επομένως:

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)\Longrightarrow\lim_{x\to2^+}(\alpha x+\beta)=\lim_{x\to2^-}x^2=2^2\Longrightarrow 2\alpha+\beta=4\qquad(1)$$

Αν υπάρχει $f'(2)$, πρέπει:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Longrightarrow\lim_{x\to2^+}\frac{\alpha x+\beta-4}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2^2}{x-2}\qquad(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\alpha x+\beta-(2\alpha+\beta)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}(x+2)\Longrightarrow\lim_{x\to2^+}\frac{\alpha(x-2)}{x-2}=4\Longrightarrow\alpha=4\qquad(3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει ότι: $\alpha=4$, $\beta=-4$

β) Έστω $\lambda=0$, τότε είναι $f(x)=e^\mu\Longrightarrow f'(x)=0\Longrightarrow f'(0)=0$. Υποθέτουμε ότι $\lambda\neq0$. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda x+\mu}-e^\mu}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda x}e^\mu-e^\mu}{x}=e^\mu\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda x}-1}{x}=$$

$$=-\lambda e^\mu\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda\mu}-1}{-\lambda x}=-\lambda e^\mu\quad\left(\text{είναι }\lim_{\omega\to0}\frac{e^\omega-1}{\omega}=1\right).$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $f'_\delta(0)=\lambda e^\mu$. Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο 0 πρέπει: $\quad f'_\alpha(0)=f'_\delta(0)\Longleftrightarrow-\lambda e^\mu=\lambda e^\mu\Longleftrightarrow2\lambda e^\mu=0\Longleftrightarrow\lambda=0$

που είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Επομένως για $\lambda=0$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

17. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}\alpha e^{2x}, & \forall x\in(-\infty,0]\\ \eta\mu2x+\beta\sigma\upsilon\nu3x, & \forall x\in(0,+\infty)\end{cases}$

α) Αν η f συνεχής στο 0, τότε α=β.

β) Αν η f παραγωγίσιμη στο 0, τότε α=β=1.

γ) Να δειχθεί ότι $|f'(x)|\le5,\quad\forall x\in(0,+\infty)$.

Απόδειξη:

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, θα είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)\Longleftrightarrow\alpha e^0=\lim_{x\to0^-}(\alpha e^{2x})=\lim_{x\to0^+}(\eta\mu2x+\beta\sigma\upsilon\nu3x)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\alpha=\alpha=\beta\qquad(1)$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Άρα $f'_\alpha(0)=f'_\delta(0)$. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\alpha e^{2x}-\alpha}{x-0}=\alpha\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\alpha\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\alpha\cdot1=2\alpha\qquad(2)$$

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x+\beta\sigma\upsilon\nu3x-\alpha}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x+\alpha(\sigma\upsilon\nu3x-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x-2\alpha\eta\mu\frac{3x}{2}\eta\mu\frac{3x}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x}{x}-2\alpha\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu\frac{3x}{2}}{x}\lim_{x\to0^+}\eta\mu\frac{3x}{2}=$$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x}{2x}+0=2\cdot1=2\qquad(3)$$

Από (2) και (3) προκύπτει $2\alpha=2\Longleftrightarrow\alpha=1$ και επειδή $\alpha=\beta$ είναι $\alpha=\beta=1$.

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=\eta\mu2x+\beta\sigma\upsilon\nu3x\Longleftrightarrow f(x)=\eta\mu2x+\sigma\upsilon\nu3x$, με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu2x-3\eta\mu3x$. Άρα:

$$|f'(x)|=|2\sigma\upsilon\nu2x-3\eta\mu3x|\le|2\sigma\upsilon\nu2x|+|3\eta\mu3x|=2|\sigma\upsilon\nu2x|+3|\eta\mu3x|\le2\cdot1+3\cdot1=5$$

18. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}1, & \forall x\in(-\infty,0]\\ 1+\ln\frac{1+x}{1-x}, & \forall x\in(0,1)\end{cases}$

α) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ο f΄(0).

β) Να λυθεί η εξίσωση f΄(x)=0 στο (0,1).

Απόδειξη:

α) Είναι: $\quad f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}0=0$

και: $f'_\delta(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+\ln\frac{1+x}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Για $0<x<1$ είναι $x>-x \implies 1+x>1-x>0 \implies \frac{1+x}{1-x}>1$. Αν $\omega>1$ ισχύει:

$$\frac{1}{\omega}\le\frac{\ln\omega}{\omega-1}\le1 \qquad (1)$$

Για $\omega=\frac{1+x}{1-x}$ η (1) δίνει:

$$\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\le\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1+x}{1-x}-1}\le1 \iff \frac{1-x}{1+x}\le\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\frac{2x}{1-x}}\le1 \iff \frac{1-x}{1+x}\le\frac{1-x}{2}\cdot\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}\le1 \iff$$

$$\iff \frac{2}{1+x}\le\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}\le\frac{2}{1-x} \qquad (2)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{1+x}=2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{1-x}=2$. Άρα η (2) δίνει:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}=2 \iff f'_\delta(0)=2$$

Επειδή $f'_\alpha(0)\ne f'_\delta(0)$ δεν υπάρχει ο $f'(0)$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{1+x}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2-2x}{(1-x)^2(1+x)}$

Η εξίσωση $f'(x)=0 \iff \frac{2(1-x)}{(1-x)^2(1+x)}=0$ δεν έχει λύση στο $(0,1)$.

19. α) Να παραγωγισθεί η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}, & \forall x\in\mathbb{R}^*\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

β) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=f'(0)$**.**

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$**.**

Λύση:

α) Αν $x\ne0$, τότε είναι $f(x)=2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}$, άρα:

$$f'(x)=4x\eta\mu\frac{1}{x^2}+2x^2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=4x\left(\eta\mu\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right)$$

Θα βρούμε την $f'(0)$. Είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}2x\eta\mu\frac{1}{x^2}=0$$

(μηδενική επί φραγμένη συνάρτηση).

β) Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=0$

(μηδενική επί φραγμένη). Επειδή $f'(0)=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=f'(0)$.

γ) Η f επειδή παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, επομένως είναι συνεχής και στο π. Άρα:

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=f(\pi) \iff \lim_{x\to\pi}2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}=2\pi^2\eta\mu\frac{1}{\pi^2}$$

20. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu^2\pi x}{x-1}, & \forall x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ 0, & \text{αν } x=1\end{cases}$

α) Να βρεθεί η f'(x).

β) Να δειχθεί ότι η f' είναι συνεχής στο 1.

(θέμα εξετάσεων)

Λύση:

α) Για $x\ne1$, είναι $f(x)=\frac{\eta\mu^2\pi x}{x-1}$. Άρα:

$$f'(x)=\frac{(\eta\mu^2\pi x)'(x-1)-(\eta\mu^2\pi x)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2(\eta\mu\pi x)(\sigma\upsilon\nu\pi x)\pi(x-1)-\eta\mu^2\pi x}{(x-1)^2}$$

Θα βρούμε την παράγωγο στο 1. Είναι:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\eta\mu^2\pi x}{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu^2\pi x}{(x-1)^2}\ \ \underline{\text{θέτουμε } x-1=\omega}$$

$$=\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu^2\pi(\omega+1)}{\omega^2}=\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu^2(\pi\omega+\pi)}{\omega^2}=\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu^2\pi\omega}{\omega^2}=\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu^2\pi\omega}{(\omega\pi)^2}\pi^2=$$

$$=\left(\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\pi\omega}{\pi\omega}\right)^2\pi^2=1\cdot\pi^2=\pi^2$$

β) Είναι $f'(1)=\pi^2$ (1). Θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to1}f'(x)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\left[\frac{\eta\mu\pi x}{(x-1)^2}\,[2\pi(x-1)\sigma\upsilon\nu\pi x-\eta\mu\pi x]\right]\ \underline{x=1+\varphi}$$

$$=\lim_{\varphi\to0}\left[\frac{\eta\mu\pi(1+\varphi)}{\varphi^2}\,[2\pi\varphi\sigma\upsilon\nu\pi(1+\varphi)-\eta\mu\pi(1+\varphi)]\right]=$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\left[\frac{\eta\mu(\pi\varphi+\pi)}{\varphi^2}\,[2\pi\varphi\sigma\upsilon\nu(\pi\varphi+\pi)-\eta\mu(\pi\varphi+\pi)]\right]=$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\left[\frac{\eta\mu\pi\varphi}{\pi\varphi}\,\pi(2\pi\sigma\upsilon\nu\pi\varphi-\frac{\eta\mu\pi\varphi}{\pi\varphi}\,\pi)\right]=\pi(2\pi-\pi)=\pi^2$$

Άρα $\lim_{x\to 1}f'(x)=\pi^2$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει $\lim_{x\to 1}f'(x)=f'(1)$, δηλαδή η f΄ είναι συνεχής στο 1.

21. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^3\pi|x|}{x^2}, & \text{για } x\neq 0\\ 0, & \text{για } x=0\end{cases}$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

Λύση: Είναι: $f(x)=\dfrac{\eta\mu^3\pi|x|}{x^2}=\pi^3x\left[\dfrac{\eta\mu\pi|x|}{\pi x}\right]^3$

Επειδή $\lim_{x\to 0}\left|\dfrac{\eta\mu\pi|x|}{\pi x}\right|=1$, έχουμε $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

Για να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αρκεί να βρούμε το:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\eta\mu^3\pi|x|}{x^3}=\pi^3\left[\frac{\eta\mu\pi|x|}{\pi x}\right]^3$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\pi|x|}{\pi x}=1$ και $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\pi|x|}{\pi x}=-1$ είναι και:

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\pi^3,\qquad f'_\alpha(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-\pi^3$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

22. α) Με τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος της f, με $f(x)=\eta\mu(2x+3)$.

β) Να βρεθεί ο $f'(0)$, αν $f(x)=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(2\pi\eta\mu x)}$.

γ) Αν $f(x)=g(e^x\eta\mu x)$, να βρεθεί η $f''(x)$.

Λύση: Είναι:

α) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu[2(x+h)+3]-\eta\mu(2x+3)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu(2x+2h+3)-\eta\mu(2x+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{2x+2h+3-2x-3}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{4x+2h+6}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\eta\mu h\sigma\upsilon\nu(2x+h+3)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu(2x+h+3)=2\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu(2x+h+3)=$$

$=2\sigma\upsilon\nu(2x+3)$ $\left(\text{διότι } \lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1\right)$.

β) Είναι $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(2\pi\eta\mu x)}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(2\pi\eta\mu 0)}}{x-0}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(2\pi\eta\mu x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\eta\mu^2(\pi\eta\mu x)}}{x}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{|\eta\mu(\pi\eta\mu x)|}{x}$$

Επειδή στον αριθμητή υπάρχει απόλυτο σχηματίζουμε τις πλευρικές παραγώγους. Είναι:

$$f'_\delta(0)=\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(\pi\eta\mu x)}{x}=\pi\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu(\pi\eta\mu x)}{\pi\eta\mu x}\,\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\pi\sqrt{2}\cdot 1\cdot 1$$

Άρα $f'_\delta(x)=\pi\sqrt{2}$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι $f'_\alpha(0)=-\pi\sqrt{2}$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο 0.

γ) Είναι $f'(x)=[g'(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x)'=[g'(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x)$ και

$$f''(x)=[g''(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x)'(e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x)+[g'(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x)'=$$

$$=[g''(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x)^2+[g'(e^x\eta\mu x)](e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x)$$

23. Να δειχθεί ότι είναι δυνατόν δυο συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο, ενώ το άθροισμά τους να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο αυτό.

Λύση: Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g, με:

$$f(x)=\begin{cases}5x+2\sqrt{x}, & \text{αν } x\geq 0\\ -3x, & \text{αν } x<0\end{cases}\qquad\text{και}\qquad g(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x}, & \text{αν } x\geq 0\\ 8x, & \text{αν } x<0\end{cases}$$

Η f+g έχει τύπο:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}5x, & \text{αν } x\geq 0\\ 5x, & \text{αν } x<0\end{cases}\iff (f+g)(x)=5x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Είναι $(f+g)'(x)=5$. Άρα $(f+g)'(0)=5$, δηλαδή η f+g παραγωγίζεται στο $x_0=0$.

Θα δείξουμε ότι οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5x+2\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(5+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

και: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-2\sqrt{x}-0}{x}=-2\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-\infty$

Άρα οι συναρτήσεις f, g δεν έχουν παράγωγο στο σημείο $x_0=0$.

24. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \max(x,x^2,x^3), & \text{αν } x\le 0 \\ \min(x,x^2,x^3), & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $f'(0)=0$ και ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Απόδειξη: Θα μετασχηματίσουμε τον τύπο της f. Αν $x\ge 1$, τότε $x\le x^2\le x^3$, άρα $\min(x,x^2,x^3)=x$. Αν $0<x<1$, τότε $x>x^2>x^3$, άρα $\min(x,x^2,x^3)=x^3$. Αν $x\le 0$, τότε $x<x^2$ και $x^3<x^2$, άρα $\max(x,x^2,x^3)=x^2$. Έτσι είναι:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\le 0 \\ x^3, & \text{αν } 0<x<1 \\ x, & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$$

α) Είναι: $f'_\alpha(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

και: $f'_\delta(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$

Άρα $f'(0)=0$

β) Είναι:

$$f'_\alpha(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$$

και $$f'_\delta(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}1=1$$

επειδή $f'_\alpha(1)\ne f'_\delta(1)$, δεν υπάρχει η $f'(1)$.

25. **α) Αν $\psi=\alpha\sigma\upsilon\nu(\kappa x)+\beta\eta\mu(\kappa x)$, να δειχθεί ότι: $\psi''+\kappa^2\psi=0$.**

β) Αν $\psi=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$, να δειχθεί ότι: $4x\psi''=\psi-2\psi'$

Απόδειξη: Είναι:

α) $\psi'=(\alpha\sigma\upsilon\nu(\kappa x))'+(\beta\eta\mu(\kappa x))'=\alpha(-\eta\mu(\kappa x))(\kappa x)'+\beta\sigma\upsilon\nu(\kappa x)(\kappa x)'=$

$=-\alpha\kappa\eta\mu(\kappa x)+\beta\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa x)$ (1)

Από (1) προκύπτει ότι:

$\psi''=(-\alpha\kappa\eta\mu(\kappa x))'+(\beta\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa x))'=-\alpha\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa x)(\kappa x)'+\beta\kappa(-\eta\mu(\kappa x))(\kappa x)'=$

$=-\alpha\kappa^2\sigma\upsilon\nu(\kappa x)-\beta\kappa^2\eta\mu(\kappa x)=-\kappa^2(\alpha\sigma\upsilon\nu(\kappa x)+\beta\eta\mu(\kappa x))=-\kappa^2\psi \Longrightarrow \psi''+\kappa^2\psi=0$

β) Είναι: $\psi'=(e^{\sqrt{x}})'+(e^{-\sqrt{x}})'=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'+e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})$$

και: $$\psi''=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})=$$

$$=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})=-\frac{1}{2x}\psi'+\frac{1}{4x}\psi \Longrightarrow$$

$$\psi''=-\frac{1}{2x}\psi'+\frac{1}{4x}\psi \Longrightarrow 4x\psi''=\psi-2\psi'$$

26. **α) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^2$. Να δειχθεί ότι $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=4f(x)$, $\forall x\in R$.**

β) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^3e^x$. Αν:

$$\alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=12xe^x \quad (1),\quad \forall x\in R$$

να προσδιορισθούν οι α, β, γ.

Απόδειξη:

α) Είναι: $f'(x)=2(x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})'=2(x+\sqrt{1+x^2})\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=$

$$=2(x+\sqrt{1+x^2})\frac{(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=2\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow f'(x)=2\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}+2x\right)$$

$$f''(x)=2\left[\frac{4x\sqrt{1+x^2}-(2x^2+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}+2\right] \Longrightarrow f''(x)=\frac{8x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x(2x^2+1)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+4$$

Είναι: $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=8x\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}+4(1+x^2)+\dfrac{2x(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}+4x^2=$

$=8x\sqrt{1+x^2}+4(1+2x^2)=4(1+2x^2+2x\sqrt{1+x^2})=4(x+\sqrt{1+x^2})^2=4f(x)$

β) Έχουμε $f'(x)=(x^3e^x)'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'=3x^2e^x+x^3e^x=e^x(3x^2+x^3)$ και

$f''(x)=(e^x)'(3x^2+x^3)+(3x^2+x^3)'e^x=e^x(3x^2+x^3+6x+3x^2)=e^x(x^3+6x^2+6x)$

Η (1) γράφεται: $\alpha x^3e^x+\beta e^x(x^3+3x^2)+\gamma e^x(x^3+6x^2+6x)=12xe^x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \alpha x^3+\beta x^3+3\beta x^2+\gamma x^3+6\gamma x^2+6\gamma x=12x \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)x^3+(3\beta+6\gamma)x^2+6\gamma x=12x\quad \forall x\in R$

Άρα: $$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\beta+6\gamma=0\\ 6\gamma=12\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-4\\ \gamma=2\end{cases}$$

27. **Δίνεται η συνάρτηση f, με** $$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ \eta\mu x, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

α) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f;

β) Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται στο 0.

γ) Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(O΄ Greemy "Calculus")

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R, διότι η f ορίζεται στο σύνολο των ρητών και στο σύνολο των άρρητων.

β) <u>1ος τρόπος:</u> Θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Επειδή $f(0)=0$ (διότι $0\in Q$) είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

Αν $x\in Q$, τότε είναι $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0}1=1$

Άρα $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_1>0$: $\forall x\in Q,\ |x-0|<\delta_1 \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$ (1)

Αν $x\in R-Q$ είναι: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

Άρα $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_2>0$: $\forall x\in R-Q,\ |x-0|<\delta_2 \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$ (2)

Αν $\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}$, τότε $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x\in R,\ |x-0|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$

(εφόσον οι (1) και (2) ισχύουν συγχρόνως). Επομένως είναι $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$,

δηλαδή: $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'(0)$$

2ος τρόπος: Επειδή το 0 είναι ρητός είναι $f(0)=0$. Είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν), με όρους ρητούς και $\lim\alpha_\nu=0$. Είναι:

$$\lim\frac{f(\alpha_\nu)}{\alpha_\nu}=\lim\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu}=\lim1=1 \quad (1)$$

Θεωρούμε την ακολουθία (β_ν), με όρους άρρητους και $\lim\beta_\nu=0$. Είναι:

$$\lim\frac{f(\beta_\nu)}{\beta_\nu}=\lim\frac{\eta\mu\beta_\nu}{\beta_\nu}=1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε ακολουθία (x_ν) πραγματικών αριθμών με $\lim x_\nu=0$, είναι:

$$\lim\frac{f(x_\nu)}{x_\nu}=1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$$

Επομένως $f'(0)=1$.

γ) Επειδή η f παραγωγίζεται στο 0 είναι συνεχής στο 0.

28. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία οι παράγωγοι των επόμενων συναρτήσεων μηδενίζονται:

α) f, με $f(x)=\frac{1}{2}\eta\mu^2x-\frac{1}{3}\eta\mu^3x,\quad x\in[0,2\pi]$

β) f, με $f(x)=xe^{-x}-1,\quad x\in R$

γ) f, με $f(x)=x\ln x,\quad x\in R^*_+$

Λύση:

α) Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{2}2\eta\mu x(\eta\mu x)'-\frac{1}{3}3\eta\mu^2x(\eta\mu x)'=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)$$

Έχουμε $f'(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)=0\\ 0\le x\le2\pi\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\eta\mu x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή } \eta\mu x=1\\ 0\le x\le2\pi\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}\eta\mu x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=0\\ 0\le x\le2\pi\end{cases} \Longleftrightarrow \left(x=0 \text{ ή } x=\frac{\pi}{2} \text{ ή } x=\pi \text{ ή } x=\frac{3\pi}{2} \text{ ή } x=2\pi\right)$

β) Είναι $f'(x)=x'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}(-x)'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$. Έχουμε: $f'(x)=0 \Longleftrightarrow (1-x)e^{-x}=0 \Longleftrightarrow x=1$

γ) Είναι $f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$

Έχουμε: $f'(x)=0 \Longleftrightarrow \ln x=-1 \Longleftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Longleftrightarrow x=e^{-1}$

29. Να βρεθούν οι ν-στής τάξης παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln x$, β) $f(x)=\eta\mu x$, γ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

α) Είναι $$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2} \Longleftrightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3} \Longleftrightarrow f'''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$$f''''(x)=\left(\frac{2}{x^3}\right)'=\frac{-6}{x^4} \Longleftrightarrow f''''(x)=\frac{-6}{x^4}$$

Από τη μορφή των μερικών παραγώγων φαίνεται ότι η ν-στή παράγωγος έχει τη μορφή: $$f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu} \quad (A)$$

Θα δείξουμε την (A) επαγωγικά. Η (A) για ν=1, δίνει:

$$f'(x)=(-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{x^1}=(-1)^0\frac{0!}{x}=1\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

που φυσικά ισχύει. Έστω ότι η (A) ισχύει, δηλαδή ισχύει η:

$$f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu} \quad (I)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η:

$$f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^\nu\frac{\nu!}{x^{\nu+1}} \quad (II)$$

Η (I) αν παραγωγίσουμε τα δυο μέλη της δίνει:

$$[f^{(\nu)}(x)]'=\left[(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^{\nu}}\right]' \Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{1'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{x^{2\nu}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\nu(-1)^{1}x^{\nu-1-2\nu} \Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!\,x^{-\nu-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!\,\frac{1}{x^{\nu+1}}$$

δηλαδή η (II) ισχύει, άρα και η (A) ισχύει $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$.

β) Είναι:

$$\left|\begin{array}{l} f'(x)=\text{συν}x \\ f''(x)=-\text{ημ}x \\ f'''(x)=-\text{συν}x \\ f''''(x)=\text{ημ}x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} f'(x)=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\ f''(x)=\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{2}+x\right) \\ f'''(x)=\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \\ f''''(x)=\text{ημ}\left(\frac{4\pi}{2}+x\right) \end{array}\right|$$

Από τις προηγούμενες ισότητες φαίνεται ότι η ν-στης τάξης παράγωγος του ημ έχει τη μορφή: $f^{(\nu)}(x)=\text{ημ}\left(\frac{\pi\nu}{2}+x\right)$ (A)

Θα δείξουμε την (A) επαγωγικά. Η (A) για ν=1, δίνει:

$$f'(x)=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\text{συν}x$$

που ισχύει. Έστω ότι ισχύει η:

$$f^{(\nu)}(x)=\text{ημ}\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right) \quad \text{(I)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η:

$$f^{(\nu+1)}(x)=\text{ημ}\left[\frac{(\nu+1)\pi}{2}+x\right] \quad \text{(II)}$$

Η (I) δίνει: $[f^{(\nu)}(x)]'=\left[\text{ημ}\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)\right]' \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=\text{συν}\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=\text{συν}\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)=\text{ημ}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)\right]=\text{ημ}\left[\frac{(\nu+1)\pi}{2}+x\right]$$

δηλαδή: $f^{(\nu+1)}(x)=\text{ημ}\left[\frac{(\nu+1)\pi}{2}+x\right]$

Άρα η (A) ισχύει. Έτσι λοιπόν $f^{(\nu)}(x)=\text{ημ}\left(\frac{\pi\nu}{2}+x\right)$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

γ) Είναι:

$$f'(x)=-\text{ημ}x \Longrightarrow f'(x)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f''(x)=-\text{συν}x \Longrightarrow f''(x)=\text{συν}\left(2\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f'''(x)=\text{ημ}x \Longrightarrow f'''(x)=\text{συν}\left(3\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι:

$$f^{(\nu)}(x)=\text{συν}\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right) \quad \text{(A)}$$

Η (A), για ν=1 δίνει $f'(x)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει η:

$$f^{(\nu)}(x)=\text{συν}\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right) \quad \text{(I)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η:

$$f^{(\nu+1)}(x)=\text{συν}\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+x\right] \quad \text{(II)}$$

Η (I) δίνει:

$$[f^{(\nu)}(x)]'=\left[\text{συν}\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right)\right]' \Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=\left[-\text{ημ}\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right)'=$$

$$=-\text{ημ}\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\nu\frac{\pi}{2}+x\right)=\text{συν}\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+x\right]$$

δηλαδή: $f^{(\nu+1)}(x)=\text{συν}\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+x\right]$

Άρα η (II) ισχύει. Επομένως η (A) ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

****30. α) Να υπολογισθεί η ν-στή παράγωγος των συναρτήσεων f και g, με τύπους $f(x)=\frac{1}{x+1}$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.**

β) Να υπολογισθεί η ν-στή παράγωγος της συνάρτησης h, με τύπο $h(x)\ \frac{2x}{x^2-1}$.

γ) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ν-στής τάξεως παραγώγου της h.

Λύση:

α) Είναι $f(x)=(x+1)^{-1}$ και:

$$f'(x)=(-1)\cdot1\cdot(x+1)^{-2} \quad =(-1)\cdot1!(x+1)^{-2}$$

$$f''(x)=(-1)^2\cdot1\cdot2\cdot(x+1)^{-3}=(-1)^2 2!(x+1)^{-3}$$

$$f'''(x)=(-1)^3 1\cdot2\cdot3(x+1)^{-4}=(-1)^3 3!(x+1)^{-4}$$

Επομένως θα είναι: $f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!(x+1)^{-(\nu+1)}$ (A)

Θα δείξουμε την (A) επαγωγικά.

Για ν=1 η (A) δίνει $f'(x)=(-1)1!(x+1)^{-2}$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύ-

ει η: $$f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!(x+1)^{-(\nu+1)} \quad (I)$$

Θα δείξουμε ότι: $f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu+1}(\nu+1)!(x+1)^{-(\nu+2)}$ (III)

Η (I) αν παραγωγίσουμε τα δυο μέλη της δίνει:

$$[f^{(\nu)}(x)]'=[(-1)^{\nu}\nu!(x+1)^{-(\nu+1)}]' \Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!(-1)(\nu+1)(x+1)^{-(\nu+2)}$$

$$f^{(\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu+1}(\nu+1)!(x+1)^{-(\nu+2)}$$

Άρα η (Α) ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Ανάλογα δείχνουμε ότι:

$$g^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!(x-1)^{-(\nu+1)}$$

β) Παρατηρούμε ότι $h(x)=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=f(x)+g(x)$. Άρα:

$$h^{(\nu)}(x)=[f(x)+g(x)]^{(\nu)}=f^{(\nu)}(x)+g^{(\nu)}(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow h^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!(x+1)^{-(\nu+1)}+(-1)^{\nu}\nu!(x-1)^{-(\nu+1)}=(-1)^{\nu}\nu!\,\frac{(x+1)^{\nu+1}+(x-1)^{\nu+1}}{(x^2-1)^{\nu+1}}$$

γ) Είναι $(x^2-1)^{\nu+1}\neq 0$, για $x\neq\pm1$, άρα η $h^{(\nu)}$ έχει πεδίο ορισμού το $R-\{\pm1\}$.

****31. Να δειχθούν οι επόμενες ισότητες:**

α) $(\eta\mu x)^{(4\nu)}=\eta\mu x$ **γ)** $(\eta\mu x)^{(4\nu+2)}=-\eta\mu x$

β) $(\eta\mu x)^{(4\nu+1)}=\sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $(\eta\mu x)^{(4\nu+3)}=-\sigma\upsilon\nu x$

Απόδειξη:

α) Θα δείξουμε την $(\eta\mu x)^{(4\nu)}=\eta\mu x$ (Α), επαγωγικά.

Η (Α) για ν=1 δίνει $(\eta\mu x)^{(4)}=\eta\mu x$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει:

$$(\eta\mu x)^{(4\nu)}=\eta\mu x \quad (I)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $(\eta\mu x)^{(4(\nu+1))}=\eta\mu x$ (II)

Έχουμε: $(\eta\mu x)^{(4(\nu+1))}=(\eta\mu x)^{(4\nu+4)}=[(\eta\mu x)^{(4\nu)}]^{(4)}\overset{(I)}{=}(\eta\mu x)^{(4)}=\eta\mu x$

Άρα: $$(\eta\mu x)^{(4(\nu+1))}=\eta\mu x$$

β) $(\eta\mu x)^{(4\nu+1)}=[(\eta\mu x)^{(4\nu)}]'\overset{(\alpha)}{=}(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

γ) $(\eta\mu x)^{(4\nu+2)}=[(\eta\mu x)^{(4\nu)}]^{(2)}=[(\eta\mu x)^{(4\nu)}]''\overset{(\alpha)}{=}(\eta\mu x)''=-\eta\mu x$

δ) $(\eta\mu x)^{(4\nu+3)}=[(\eta\mu x)^{(4\nu)}]^{(3)}=(\eta\mu x)^{(3)}=(\eta\mu x)'''=-\sigma\upsilon\nu x$

****32. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\alpha x)$.**

α) Να δειχθεί ότι η f΄ είναι συνάρτηση περιττή.

β) Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

γ) Να βρεθεί η $f^{(\nu)}$.

Απόδειξη:

α) Είναι $f'(x)=[-\eta\mu(\alpha x)](\alpha x)'=-\alpha\eta\mu\alpha x$. Πεδίο ορισμού της f΄ είναι το **R**. Έχουμε: $f'(-x)=-\alpha\eta\mu[\alpha(-x)]=\alpha\eta\mu\alpha x=-f'(x)$

Άρα η f΄ είναι περιττή.

β) Η f παραγωγίζεται στο **R** επομένως είναι συνεχής στο **R**.

γ) Είναι: $f'(x)=-\eta\mu(\alpha x)(\alpha x)'=-\eta\mu(\alpha x)\alpha=-\alpha\eta\mu(\alpha x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha x\right)$

$$f''(x)=-\alpha^2\sigma\upsilon\nu(\alpha x)=\alpha^2\sigma\upsilon\nu\left(2\frac{\pi}{2}+\alpha x\right)$$

$$f'''(x)=\alpha^3\eta\mu(\alpha x)=\alpha^3\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{2}+\alpha x\right)$$

Αρκεί να δειχθεί ότι:

$$f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x\right) \quad (1) \quad \forall \nu\in \mathbb{N}^*$$

Για ν=1 η (1) ισχύει. Έστω ότι ισχύει η:

$$f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x\right) \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η:

$$f^{(\nu+1)}(x)=\alpha^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+\alpha x\right] \quad (3)$$

Η (2) αν παραγωγίσουμε δίνει:

$$[f^{(\nu)}(x)]'=f^{(\nu+1)}(x)=-\alpha^{\nu}\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x\right)(\alpha x)'=-\alpha^{\nu+1}\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x\right) \quad (4)$$

Έχουμε ότι: $-\eta\mu(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x)=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}+\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x\right]=\sigma\upsilon\nu\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+\alpha x\right]$

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε:

$$f^{(\nu+1)}(x)=\alpha^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\left[(\nu+1)\frac{\pi}{2}+\alpha x\right]$$

Άρα η (3) ισχύει.

****33. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.**

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να δειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu)}=(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+1}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{\nu}\right) \quad (A)$$

Λύση:

α) Είναι $A=(0,+\infty)$.

β) Είναι: $f'(x)=\frac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

Πεδίο ορισμού της f' είναι το $(0,+\infty)$. Άρα η f παραγωγίζεται $\forall x\in(0,+\infty)$.

γ) Θα δείξουμε την (A) επαγωγικά. Για ν=1, η (A) δίνει:

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=(-1)\frac{1}{x^{1+1}}(\ln x-1)\iff\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

που ισχύει. Έστω ότι ισχύει:

$$\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu)}=(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+1}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)\quad\text{(I)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η:

$$\frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=(-1)^{\nu+1}\frac{1}{x^{\nu+2}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)\quad\text{(II)}$$

Η (I) αν παραγωγίσουμε τα δυο μέλη της δίνει:

$$\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu)}\right]'=\left[(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+1}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)\right]'\implies$$

$$\implies\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=(-1)^{\nu}\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right)'\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)+$$

$$+(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+1}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)'\implies\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{-(\nu+1)x^{\nu}}{x^{2\nu+2}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)+(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+1}}\left(\frac{1}{x}\right)\implies$$

$$\implies\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=(-1)^{\nu}(-1)\frac{(\nu+1)}{x^{\nu+2}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)+(-1)^{\nu}\frac{1}{x^{\nu+2}}\implies$$

$$\implies\frac{1}{(\nu+1)\nu!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=(-1)^{\nu+1}\frac{1}{x^{\nu+2}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{\nu}\right)+(-1)^{\nu+1}\frac{(-1)}{x^{\nu+2}}\frac{1}{\nu+1}$$

$$\implies\frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(\nu+1)}=(-1)^{\nu+1}\frac{1}{x^{\nu+2}}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

Δηλαδή η (II) ισχύει. Άρα η (A) ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

34. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{-x}\eta\mu x$.

α) Να βρεθεί η f' και η f''.

β) Να δειχθεί ότι $|f'(x)|<\sqrt{2}$ και ότι $|f''(x)|<2$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

γ) Να δειχθεί ότι η f' είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη:

α) Είναι:

$f'(x)=(e^{-x}\eta\mu x)'=(e^{-x})'\eta\mu x+e^{-x}(\eta\mu x)'=-e^{-x}\eta\mu x+e^{-x}\sigma\upsilon\nu x=e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$ και

$$f''(x)=[e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)]'=(e^{-x})'(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'=$$

$$=-e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+e^{-x}(-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)=-2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$

β) Είναι: $f'(x)=e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=e^{-x}\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\eta\mu x\right]=$

$$=e^{-x}2\eta\mu\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}=e^{-x}2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\,e^{-x}\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Επομένως: $|f'(x)|=\left|\sqrt{2}\,e^{-x}\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|=\sqrt{2}\left|e^{-x}\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|=$

$$=\sqrt{2}\,e^{-x}\left|\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\le\sqrt{2}\,e^{-x}=\frac{\sqrt{2}}{e^x}<\sqrt{2}$$

Έχουμε ακόμα $|f''(x)|=|-2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x|=2e^{-x}|\sigma\upsilon\nu x|\le 2e^{-x}1=\frac{2}{e^x}<2$

γ) Η f'' ορίζεται $\forall x\in\mathbb{R}$, επομένως η f' παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής.

**35 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f, με $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{x^2+(\alpha x^2+\beta+1)e^{\nu x}}{2+e^{\nu x}}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(Bacalaureat Paris)

Λύση:

Αν x=0, τότε: $f(0)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{\beta+1}{3}=\frac{\beta+1}{3}$

Αν x>0 είναι: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{e^{\nu x}}+(\alpha x^2+\beta+1)}{\frac{2}{e^{\nu x}}+1}=\alpha x^2+\beta+1$

Αν x<0, είναι: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^2+(\alpha x^2+\beta+1)\frac{1}{e^{-\nu x}}}{2+\frac{1}{e^{-\nu x}}}=\frac{x^2}{2}$

Άρα η f έχει τύπο: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & \forall x\in(-\infty,0)\\ \alpha x^2+\beta+1, & \forall x\in(0,+\infty)\\ \frac{\beta+1}{3}, & \text{αν } x=0\end{cases}$

Όπως φαίνεται από τον τύπο της, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Εξετάζουμε την παράγωγο στο 0. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0, πρέπει να είναι συνεχής στο 0. Άρα:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\iff\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to0^+}(\alpha x^2+\beta+1)=\frac{\beta+1}{3}\iff0=\beta+1=\frac{\beta+1}{3}\implies\beta=-1$$

'Ετσι είναι: $$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \forall x\in(-\infty,0) \\ \alpha x^2, & \forall x\in(0,+\infty) \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Για να υπάρχει η $f'(0)$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff \lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2}{2}}{x} \iff$$

$$\iff \lim_{x\to 0^+}\alpha x=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2} \iff 0=0$$

Επομένως είναι $\alpha\in R$ (οποιοσδήποτε) και $\beta=-1$.

****36. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και σ, με:**

$f(x)=1+x+x^2+\dots+x^\nu$, $g(x)=1+2x+3x^2+\dots+\nu x^{\nu-1}$, $\sigma(x)=1+2^2x+3^2x^2+\dots+\nu^2x^{\nu-1}$ ορισμένες στο R.

α) Να μετασχηματιστεί η συνάρτηση f σε ρητή.

β) Να δειχθεί ότι $\sigma(x)=[xg(x)]'$.

γ) Να μετασχηματιστούν οι συναρτήσεις g και σ σε ρητές.

δ) Να υπολογισθεί το άθροισμα $S=e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\dots+\nu e^{\nu x}$.

(U. of L.)

Λύση:

α) Ο τύπος της f είναι άθροισμα των ν+1 πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το 1 και λόγο x. 'Ετσι, για $x\neq 1$, είναι:

$$f(x)=\frac{1-x^{\nu+1}}{1-x}$$

β) Είναι: $xg(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots+\nu x^\nu \xrightarrow{\text{παραγωγίζοντας}}$

$$\Longrightarrow [xg(x)]'=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\dots+\nu^2x^{\nu-1}$$

'Αρα: $$[xg(x)]'=\sigma(x)$$

γ) Είναι: $g(x)=f'(x)=\left(\frac{1-x^{\nu+1}}{1-x}\right)'=\frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1}{(1-x)^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g(x)=\frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1}{(1-x)^2}$$

Ισχύει ακόμα ότι: $xg(x)=\frac{\nu x^{\nu+2}-(\nu+1)x^{\nu+1}+x}{(1-x)^2}=\frac{P(x)}{(1-x)^2}$

Η $\sigma(x)=[xg(x)]'$, δίνει $\sigma(x)=\frac{(1-x)P'(x)+2P(x)}{(1-x)^3}$. 'Αρα:

$$\sigma(x)=\frac{-\nu^2x^{\nu+2}+(2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1}-(\nu+1)^2x^\nu+x+1}{(1-x)^3}$$

δ) Είναι: $$e^x+e^{2x}+e^{3x}+\dots+e^{\nu x}=\frac{e^{(\nu+1)x}-e^x}{e^x-1} \quad (x\neq 0)$$

Παραγωγίζουμε τα δυο μέλη της ισότητας αυτής, οπότε είναι:

$$e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\dots+\nu e^{\nu x}=\left[\frac{e^{(\nu+1)x}-e^x}{e^x-1}\right]', \quad \text{κλπ.}$$

37. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο R.

α) Αν η f είναι περιττή, τότε η παράγωγός της είναι άρτια.

β) Αν η f είναι "1-1", η παράγωγός της δεν είναι απαραίτητα "1-1".

γ) Αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική.

δ) Αν η f' είναι περιοδική, τότε η f είναι περιοδική;

Απόδειξη:

α) 'Εστω ότι $f(-x)=-f(x)$ (1), $\forall x\in R$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$f'(-x)(-x)'=-f'(x) \iff -f'(-x)=-f'(x) \iff f'(-x)=f'(x)$$

'Αρα η f' είναι άρτια.

β) Η f, με $f(x)=x^3$, $\forall x\in R$ είναι "1-1", διότι:

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1^3=x_2^3 \Longrightarrow x_1=x_2$$

'Εχουμε $f'(x)=3x^2$, $\forall x\in R$. Επειδή $f'(x_1)=f'(x_2) \Longrightarrow 3x_1^2=3x_2^2 \Longrightarrow x_1=\pm x_2$, η f δεν είναι "1-1".

γ) Αν η f είναι περιοδική, τότε $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in R$, με $T\in R^*$. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x+T)(x+T)'=f'(x) \iff f'(x+T)=f'(x), \ \forall x\in R$$

'Αρα η f' είναι περιοδική.

δ) 'Εστω η f, με $f(x)=x+\eta\mu x$, $\forall x\in R$. Είναι: $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in R$. Παρατηρούμε ότι η f' είναι περιοδική, ενώ η f δεν είναι περιοδική.

Επομένως όταν η f' είναι περιοδική, δεν σημαίνει ότι και η f είναι πάντα περιοδική.

****38. α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $\psi=f(x)$, ώστε $\psi'=3\psi$. (1).**

β) Να λυθεί στο R η εξίσωση $[f_o(x)]^2-4f_o(x)-5=0$ (2), όπου $f_o(x)$ είναι μια λύση της (1), με $f_o(0)=3$.

(Πανεπιστήμιο Αθηνών - τμηματικές εξετάσεις)

Λύση:

α) Προφανής λύση της (1) είναι η $\psi=0$.

Έστω $\psi\neq 0$, τότε: $\psi'=3\psi \iff \frac{\psi'}{\psi}=3 \iff (\ln\psi)'=(3x)' \iff \ln\psi=3x+c^*$ (3)

$(c\in R)$. Θεωρούμε ότι $c=\ln\alpha$ $(\alpha>0)$. Η (3) γράφεται:

$$\ln\psi=3x+\ln\alpha \iff \ln\psi-\ln\alpha=3x \iff \ln\left(\frac{\psi}{\alpha}\right)=3x \iff \frac{\psi}{\alpha}=e^{3x} \iff \psi=e^{3x}\alpha \iff$$

$$\iff f(x)=e^{3x}\alpha \quad (4)$$

β) Η (4) για $x=0$ δίνει $f(0)=e^0\alpha \iff f(0)=\alpha$. Επομένως $\alpha=3$. Η (4) δίνει:

$$f_o(x)=3e^{3x}$$

Έτσι η (2) γράφεται $(3e^{3x})^2-4(3e^{3x})-5=0$ (5).

Η (5) για $3e^{3x}=\omega$ (6), δίνει:

$$\omega^2-4\omega-5=0 \begin{cases} \omega_1=5 \\ \omega_2=-1 \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Η (6) δίνει $3e^{3x}=5 \iff e^{3x}=\frac{5}{3} \iff \ln e^{3x}=\ln\frac{5}{3} \iff 3x\ln e=\ln\frac{5}{3} \iff$

$$\iff 3x=\ln\frac{5}{3} \iff x=\frac{\ln\frac{5}{3}}{3}$$

****39. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha_1\eta\mu x+\alpha_2\eta\mu 2x+\alpha_3\eta\mu 3x+\ldots+\alpha_\nu\eta\mu\nu x$, για την οποία ισχύει $|f(x)|\leq|\eta\mu x|$ (1), $\forall x\in R$. Να δειχθεί ότι:**

α) $|\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+\nu\alpha_\nu|\leq 1$ (2)

β) Η f είναι φραγμένη

Απόδειξη:

α) Είναι:

$f'(x)=\alpha_1\sigma\upsilon\nu x+2\alpha_2\sigma\upsilon\nu 2x+3\alpha_3\sigma\upsilon\nu 3x+\ldots+\nu\alpha_\nu\sigma\upsilon\nu(\nu x) \Longrightarrow f'(0)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+\nu\alpha_\nu$

Αντί για τη (2) αρκεί να δείξουμε ότι $|f'(0)|\leq 1$. Είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \quad (\text{διότι } f(0)=0)$$

Επομένως:

$$|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left[\frac{|f(x)|}{|\eta\mu x|}\cdot\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right|=1\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right|\overset{(1)}{\leq}1\cdot 1$$

Άρα $|f'(0)|\leq 1$.

β) Επειδή $|f(x)|\leq|\eta\mu x|\leq 1$, $\forall x\in R$, η f είναι φραγμένη.

****40. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=x^\nu$, $\forall x\in R$ $(\nu\in N^*)$. Να δειχθεί ότι:**

* Αν δυο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους διαφέρουν κατά μια σταθερά.

I) $2^\nu=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(1)}{3!}+\ldots+\frac{f^{\nu}(1)}{\nu!}$

II) Αν ν άρτιος να δειχθεί ότι $1-\frac{\nu}{1!}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}-\ldots+1=0$

β) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^x(x-\alpha)$, $x\in R$, $\alpha\in R$. Αν η ν-στής τάξεως παράγωγος της f είναι η $f^{(\nu)}(x)=e^x(x-\alpha+\nu)$, να δειχθεί ότι:

$$f(x)+f'(x)+f''(x)+\ldots+f^{\nu}(x)=e^x(\nu+1)\left(x-\alpha+\frac{\nu}{2}\right)$$

Απόδειξη:

α) I) Είναι $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, $f''(x)=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}$, $f'''(x)=\nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3}$, ..., $f^{(\nu)}(x)=\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\nu+1)x^{\nu-\nu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 2\cdot 1=\nu!$. Έχουμε:

$$f(x)+\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(\kappa)}(x)}{\kappa!}+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}=$$

$$=x^\nu+\frac{\nu}{1!}x^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!}x^{\nu-\kappa}+\ldots+\frac{\nu!}{\nu!}=(x+1)^\nu \quad (1)$$

Έτσι είναι: $f(x)+\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}=(x+1)^\nu$

που για $x=1$ δίνει $f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!}=2^\nu$.

II) Η (1) για $x=-1$, δίνει:

$$(-1)^\nu+\frac{\nu}{1!}(-1)^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}(-1)^{\nu-2}+\ldots+1=(-1+1)^\nu \iff 1-\frac{\nu}{1!}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}-\ldots+1=0$$

β) Είναι: $f(x)+f'(x)+f''(x)+\ldots+f^{\nu}(x)=$

$$=e^x(x-\alpha)+e^x(x-\alpha+1)+e^x(x-\alpha+2)+\ldots+e^x(x-\alpha+\nu)=$$

$$=e^x[(x-\alpha)+(x-\alpha+1)+(x-\alpha+2)+\ldots+(x-\alpha+\nu)]=$$

$$=e^x\frac{(x-\alpha)+[(x-\alpha)+\nu]}{2}(\nu+1)=e^x(\nu+1)\left(x-\alpha+\frac{\nu}{2}\right)$$

****41. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{-x}\eta\mu 2x$, $x\in R$.**

α) Να βρεθεί η $f'(x)$.

β) Να δειχθεί ότι οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι όροι διαδοχικοί δυο αριθμητικών προόδων.

γ) Να δειχθεί ότι οι τιμές των ριζών της $f'(x)=0$ για τη συνάρτηση f είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Bacalaureat Montréal)

Απόδειξη:

α) Είναι: $f'(x)=(e^{-x}\eta\mu 2x)'=(e^{-x})'\eta\mu 2x+(e^{-x})(\eta\mu 2x)'=$

$$=e^{-x}(-x)'\eta\mu 2x+e^{-x}(\sigma\upsilon\nu 2x)(2x)'=e^{-x}(-1)\eta\mu 2x+2e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x=$$

$$=2e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x-e^{-x}\eta\mu 2x=e^{-x}(2\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x)$$

β) Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$2\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x=0 \qquad (1)$$

(είναι $e^{-x}\neq 0$). Η (1) γράφεται:

$$2\,\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}-\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}=0 \iff 2-\varepsilon\varphi 2x=0 \iff \varepsilon\varphi 2x=2 \qquad (2)$$

Έστω ότι $2=\varepsilon\varphi 2\alpha$, τότε η (2) γράφεται:

$$\varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi 2\alpha \iff 2x=\kappa\pi+2\alpha \iff x=\alpha+\kappa\frac{\pi}{2} \qquad \kappa\in Z$$

Άρα οι ζητούμενες ρίζες είναι:

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\pi}{2},\ \alpha+2\frac{\pi}{2},\ \alpha+3\frac{\pi}{2},\ldots$$

$$\alpha,\ \alpha-\frac{\pi}{2},\ \alpha-2\frac{\pi}{2},\ \alpha-3\frac{\pi}{2},\ldots$$

που όπως φαίνεται αποτελούν δυο αριθμητικές προόδους.

γ) Όταν ο x πάρει τις τιμές $x_\rho=\alpha+\kappa\frac{\pi}{2}$, τότε:

$$f(x_\rho)=e^{-\alpha-\kappa\frac{\pi}{2}}\eta\mu(2\alpha+\kappa\pi)=(\eta\mu 2\alpha)(-1)^\kappa e^{-\alpha-\kappa\frac{\pi}{2}}, \quad \kappa\in \mathbf{Z}$$

$$f(x_\rho)=(e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha)(-1)^\kappa(e^{-\frac{\pi}{2}})^\kappa$$

Έτσι, για $\kappa=0,1,2,3,\ldots$, προκύπτουν οι τιμές:

$$(e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha),\quad -(e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha)e^{-\frac{\pi}{2}},\quad (e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha)e^{-\pi},\quad -(e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha)e^{-3\frac{\pi}{2}},\ \ldots$$

που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, με πρώτο όρο το $e^{-\alpha}\eta\mu 2\alpha$ και λόγο $\lambda=-(e^{-\frac{\pi}{2}})$. Αν $\kappa=0,-1,-2,-3,\ldots$ προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

**** 42. Αν $f_1(x)=\eta\mu x$, $f_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f_{\nu+2}(x)=\eta\mu f_{\nu+1}(x)+\sigma\upsilon\nu f_\nu(x)$ (1), $\forall\, \nu\in N^*$ και η συνάρτηση f_ν είναι παραγωγίσιμη στο R, $\forall\, \nu\in N^*$, να δειχθεί ότι:**

$$|f'_{\nu+2}(x)|\le|f'_{\nu+1}(x)|+|f'_\nu(x)|, \quad \forall\nu\in N^*, \quad \forall x\in R$$

(Κολλέγιο Αγ. Γεωργίου, Πραιτώρια)

Απόδειξη: Η (1) δίνει:

$$f'_{\nu+2}(x)=[\eta\mu f_{\nu+1}(x)]'+[\sigma\upsilon\nu f_\nu(x)]' \implies$$

$$\implies f'_{\nu+2}(x)=[\sigma\upsilon\nu f_{\nu+1}(x)]f'_{\nu+1}(x)-[\eta\mu f_\nu(x)]f'_\nu(x) \implies$$

$$\implies |f'_{\nu+2}(x)|=|f'_{\nu+1}(x)\sigma\upsilon\nu f_{\nu+1}(x)-f'_\nu(x)\eta\mu f_\nu(x)|\le|f'_{\nu+1}(x)||\sigma\upsilon\nu f_{\nu+1}(x)|+$$

$$+|f'_\nu(x)||\eta\mu f_\nu(x)|\le|f'_{\nu+1}(x)|+|f'_\nu(x)|$$

(διότι $|\sigma\upsilon\nu f_{\nu+1}(x)|\le 1$ και $|\eta\mu f_\nu(x)|\le 1$).

**** 43. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\longrightarrow R$, με $f(1)=e$ και:**

$$f(x+\psi)=f(x)f(\psi) \quad (1), \quad \forall x,\psi\in R$$

Να δειχθεί ότι:

α) $f(x)>0$, $\forall x\in R$

β) $f(0)=1$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι συνεχής στο R

δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο R. **(Ε.Μ.Π.)**

Απόδειξη:

α) Η (1) βάζοντας όπου x και ψ το $\frac{x}{2}$, δίνει:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \implies f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\ge 0$$

Άρα: $\quad f(x)\ge 0 \quad (2)$

Αν $f(x)=0$, τότε θα είναι και $f(1)=0$, που είναι αδύνατο, εφόσον $f(1)=e$. Άρα η (2) δίνει $f(x)>0$.

β) Η (1) για $\psi=0$ δίνει:

$$f(x)=f(x)f(0) \implies f(0)=1$$

γ) Ισχύει $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$, γιατί η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Για να είναι συνεχής στο R, πρέπει $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$, $\xi\in$ R. Είναι:

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi}f((x-\xi)+\xi)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to\xi}[f(x-\xi)f(\xi)]=f(\xi)\lim_{x\to\xi}f(x-\xi)=f(\xi)f(0)=f(\xi)$$

δ) Έστω $\xi\in$ R. Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, θα είναι:

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

Θέτουμε $x=\xi+h$. Όταν $x\longrightarrow\xi \implies h\longrightarrow 0$. Είναι:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}=f(\xi)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=$$

$$=f(\xi)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(\xi)f'(0)$$

Άρα $f'(\xi)=f(\xi)f'(0)$ και επομένως $f'(x)=f(x)f'(0)$, $\forall x\in$ **R**.

**** 44. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: [-1,1]\longrightarrow[1,2]$, για την ο-**

ποία ισχύει $2x-x^2 \le g(x) \le x^2$ (1), $\forall x \in [-1,1]$. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{g^2(x)}{1+g(x)}$ (2), $\forall x \in [-1,1]$.

α) Να δειχθεί ότι $g(0)=0$.

β) Να δειχθεί ότι η g είναι συνεχής στο 0.

γ) Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

δ) Να δειχθεί ότι $f'(0)=0$.

Απόδειξη:

α) Η (1), για $x=0$, δίνει $0 \le g(0) \le 0 \iff g(0)=0$.

β) Η g σαν παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$, άρα και στο 0.

γ) Η f είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, όπως φαίνεται από τη (2).

δ) Είναι: $f'(x)=\dfrac{2g(x)g'(x)[1+g(x)]-g^2(x)[1+g(x)]'}{[1+g(x)]^2}=$

$$=\frac{2g(x)g'(x)+2g^2(x)g'(x)-g^2(x)g'(x)}{[1+g(x)]^2}=\frac{2g(x)g'(x)+g^2(x)g'(x)}{[1+g(x)]^2}$$

Είναι επομένως: $f'(0)=\dfrac{2g(0)g'(0)+g^2(0)g'(0)}{[1+g(0)]^2}$ (3)

Η (3) επειδή $g(0)=0$, δίνει $f'(0)=0$.

**** 45. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ (Δ⊆R) και α∈Δ, τότε να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$.**

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f: R ⟶ R, για την οποία είναι:

$$|f(\alpha)-f(\beta)| \le |\alpha-\beta|^2 \quad (1), \quad \forall \alpha,\beta \in R \quad (\alpha \ne \beta)$$

Να δειχθεί ότι $f'(x)=0$, $\forall x \in R$.

(Bacalaureat Dijon)

Απόδειξη:

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο α, είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ (1). Είναι:

$$\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=\frac{xf(\alpha)-xf(x)+xf(x)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=\frac{(x-\alpha)f(x)}{x-\alpha}-\frac{x[f(x)-f(\alpha)]}{x-\alpha}=$$

$$=f(x)-x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\left[f(x)-x\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]=$

$$=\lim_{x\to\alpha}f(x)-\lim_{x\to\alpha}x\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\overset{(1)}{=}f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$$

β) Η (1) γράφεται:

$$|f(\alpha)-f(\beta)| \le |\alpha-\beta|^2 \iff \frac{|f(\alpha)-f(\beta)|}{|\alpha-\beta|} \le |\alpha-\beta| \quad (2), \quad \forall \alpha,\beta \in R, \text{ με } \alpha \ne \beta$$

Έχουμε: $0 \le \left|\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|$ (3)

Από (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$0 \le \left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| \le |x-\xi| \quad (4)$$

όπου ξ∈R. Επειδή $\lim\limits_{x\to\xi}(x-\xi)=0$ είναι και:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=0 \Longrightarrow f'(\xi)=0 \Longrightarrow f'(x)=0, \ \forall x \in R$$

**** 46. Δίνεται η συνάρτηση f: R ⟶ R, για την οποία είναι:**

$$f(x+\psi)=\alpha x\psi+\psi^2+f(x) \quad (1), \quad \forall x,\psi \in R \ (\alpha \in R)$$

Δίνεται ότι $f(1)=-1$, $f(2)=2$.

α) Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

(Baccalaureat Maroque)

Απόδειξη:

α) Είναι:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to0}\frac{\alpha xh+h^2+f(x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}(\alpha x+h)=\alpha x$$

Άρα είναι $f'(x)=\alpha x$, $\forall x \in R$, επομένως η f παραγωγίζεται.

β) Η (1), για $x=1$, $\psi=1$, δίνει:

$$f(2)=\alpha\cdot1+1+f(1) \iff 2=\alpha+1-1 \iff \alpha=2$$

Άρα είναι και $f'(x)=2x$. Επομένως $f(x)=x^2+c$ (διότι $(x^2+c)'=2x$). Έχουμε:

$$f(1)=1+c=-1 \iff c=-2$$

Έτσι είναι $f(x)=x^2-2$.

**** 47. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ορισμένες στο διάστημα Δ (Δ⊆R). Αν οι f και g παραγωγίζονται στο Δ και για το σημείο x_0 του Δ ισχύει:**

$$f(x_0)=0, \ g(x_0)=1 \quad (1)$$

και ακόμα: $f'(x)=g(x)h(x)$, $g'(x)=-f(x)h(x)$ (2), $\forall x \in \Delta$

να δειχθεί ότι $f^2(x)+g^2(x)=1$, $\forall x \in \Delta$. (Αμερικανικό Κολλέγιο Κων/πολης)

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\varphi(x)=f^2(x)+g^2(x)$. Είναι:

$$\varphi'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\overset{(2)}{=\!=}2f(x)g(x)h(x)-2g(x)f(x)h(x)=0$$

Άρα: $\varphi'(x)=0,\ \forall x\in\Delta \Longrightarrow \varphi(x)=c,\ \forall x\in\Delta$

Έτσι είναι: $f^2(x)+g^2(x)=c \quad (3)$

Η (3) για $x=x_0$ δίνει $f^2(x_0)+g^2(x_0)=c \overset{(2)}{\Longrightarrow} 0^2+1^2=c$

Άρα $c=1$. Επομένως $f^2(x)+g^2(x)=1$.

***** 48. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, h και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Δ (Δ⊆R) και ότι $x_0\in\Delta$. Αν $f(x)\le h(x)\le g(x)$, $\forall x\in\Delta$ και:**

$$f(x_0)=g(x_0),\ f'(x_0)=g'(x_0)$$

να δειχθεί ότι υπάρχει η $h'(x_0)$. **(Κολλέγιο Αγ. Ραφαήλ, Bolonia)**

Απόδειξη: Είναι $f(x_0)\le h(x_0)\le g(x_0)$ και $f(x_0)=g(x_0)$. Επομένως:

$$h(x_0)=f(x_0)=g(x_0) \quad (1)$$

Είναι $f(x)\le h(x)\le g(x) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(x)-f(x_0)\le h(x)-h(x_0)\le g(x)-g(x_0) \quad (2).$

α) Αν $x>x_0$, οι (2) δίνουν:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\le\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \quad (3)$$

Επειδή $f'(x_0)=g'(x_0)$, είναι:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \quad (4)$$

Από (3) και (4), σύμφωνα με την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων, προκύπτει: $\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=f'_\delta(x_0)=g'_\delta(x_0)$.

β) Αν $x<x_0$, οι (2) δίνουν:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\ge\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή $f'(x_0)=g'(x_0)$, είναι:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επομένως είναι και: $\lim_{x\to x_0^-}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=f'_\alpha(x_0)=g'_\alpha(x_0)$

Έτσι είναι $h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=g'(x_0)$

49. Δίνεται η συνάρτηση h, με τύπο:

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\ne 0\\ 0, & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

α) Αν $f(0)=0$, $f'(0)=0$, να δειχθεί ότι $h'(0)=0$.

β) Αν $|f(x)|\le 1$, $\forall x\in R^*$, να δειχθεί ότι η h είναι φραγμένη στο R^*.

γ) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}f(x)x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

(J. Massena "Calculus")

Απόδειξη:

α) Είναι:

$$\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le 1 \Longrightarrow 0\le\left|f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|=|f(x)|\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le|f(x)|1=|f(x)| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0\le\left|\frac{f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-0}{x-0}\right|\le\left|\frac{f(x)-0}{x-0}\right| \Longrightarrow 0\le\left|\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \quad (1)$$

Είναι: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|$

Επομένως η (1) δίνει: $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)=0$

β) Είναι: $|h(x)|=\left|f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le|f(x)|\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le 1\cdot 1=1$

Άρα η h είναι φραγμένη.

γ) Είναι $\lim_{x\to 0}f(x)x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=0$, σαν γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη.

**** 50. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα [0,2]. Αν $2[f(x)]^2-[g(x)]^3+9=0$ (1), $\forall x\in[0,2]$ και $f(1)=3$, $f'(1)=-2$, να δειχθεί ότι $g(1)=3$ και $g'(1)=-\frac{8}{9}$.**

Απόδειξη: Η (1), για $x=1$ δίνει:

$$2[f(1)]^2-[g(1)]^3+9=0 \Longleftrightarrow 2\cdot 9-[g(1)]^3+9=0 \Longleftrightarrow [g(1)]^3=27 \Longleftrightarrow g(1)=3$$

Η (1) με παραγώγιση δίνει:

$$4f(x)f'(x)-3[g(x)]^2g'(x)=0 \quad (2)$$

Η (2) για $x=1$ δίνει $4\cdot 3(-2)-3[3^2]g'(1)=0 \Longleftrightarrow g'(1)=-\frac{8}{9}$.

51. Αν οι συναρτήσεις σ και φ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα (-α,α) και ισχύουν οι σχέσεις $\sigma'(x)=\varphi(x)$, $\sigma(0)=0$ και $\varphi'(x)=-\sigma(x)$, $\varphi(0)=1$,

να δειχθεί ότι: $\varphi^2(x)+\sigma^2(x)=1$ **(θέμα εξετάσεων)**

Απόδειξη: Έστω ότι $g(x)=\varphi^2(x)+\sigma^2(x)$ (1). Είναι:

$$g'(x)=[\varphi^2(x)+\sigma^2(x)]'=[\varphi^2(x)]'+[\sigma^2(x)]'=2\varphi'(x)\varphi(x)+2\sigma'(x)\sigma(x)=$$
$$=2[-\sigma(x)]\varphi(x)+2\varphi(x)\sigma(x)=0$$

Επειδή $g'(x)=0$ είναι $g(x)=c$. Η (1) για $x=0$ δίνει:

$$g(0)=\varphi^2(0)+\sigma^2(0)=1+0=1$$

οπότε $g(x)=1$.

52. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, με $f(x)=\alpha\varphi(x)+\beta$ και g, με $g(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και φ συνάρτηση παραγωγίσιμη για κάθε $x\in R$ με $\varphi'(x)\neq 0$ και $\varphi(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

Απόδειξη: Είναι $f'(x)=\alpha\varphi'(x)$, $f''(x)=\alpha\varphi''(x)$ και $f'''(x)=\alpha\varphi'''(x)$. Επομένως:

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right)^2 \quad (1)$$

Επίσης είναι: $g(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)} \Longrightarrow g'(x)=\dfrac{-\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \Longrightarrow g'(x)=-g^2(x)\varphi'(x) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g''(x)=-2g(x)g'(x)\varphi'(x)-g^2(x)\varphi''(x) \quad (2)$$

Άρα: $\dfrac{g''(x)}{g'(x)}=-2g(x)\varphi'(x)+\dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \Longrightarrow \dfrac{g''(x)}{g'(x)}=\dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-2\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow -\frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2=-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2=$$
$$=-\frac{3}{2}\left[\frac{(\varphi''(x))^2}{(\varphi'(x))^2}-4\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}+4\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi^2(x)}\right]=$$
$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right)^2+6\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}-6\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \quad (3)$$

Η (2) δίνει: $g''(x)=2g^3(x)(\varphi'(x))^2-g^2(x)\varphi''(x) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g'''(x)=6g^2(x)g'(x)(\varphi'(x))^2+4g^3(x)\varphi'(x)\varphi''(x)-2g(x)g'(x)\varphi''(x)-g^2(x)\varphi'''(x)=$$
$$=6\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2g'(x)-4g(x)(-g^2(x)\varphi'(x))\varphi''(x)-2g(x)g'(x)\varphi''(x)-$$
$$-g^2(x)\varphi'(x)\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}=6\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2g'(x)-4g(x)g'(x)\varphi''(x)-2g(x)g'(x)\varphi''(x)+$$
$$+g'(x)\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} \Longrightarrow \frac{g'''(x)}{g'(x)}=6\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2-6\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}+\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} \quad (4)$$

Από (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2=\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right)^2 \quad (5)$$

Από (1) και (5) προκύπτει η αποδεικτέα.

53. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h που έχουν παραγώγους κάθε τάξεως στο R. Αν $h(x)=f(x)g(x)$ (1), $f'(x)g'(x)=3$ (2), $\forall x\in R$ και $h(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, να δειχθεί ότι $\dfrac{h'''(x)}{h(x)}=\dfrac{f'''(x)}{f(x)}+\dfrac{g'''(x)}{g(x)}$, $\forall x\in R$.

Απόδειξη: Η (1) δίνει:

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \Longrightarrow h''(x)=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+$$
$$+f(x)g''(x) \Longrightarrow h''(x)\overset{(2)}{=}f''(x)g(x)+3+3+f(x)g''(x) \Longrightarrow h'''(x)=$$
$$=f'''(x)g(x)+f''(x)g'(x)+f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x) \Longrightarrow h'''(x)=f'''(x)g(x)+$$
$$+[f'(x)g'(x)]'+f(x)g'''(x) \Longrightarrow h'''(x)\overset{(2)}{=}f'''(x)g(x)+0+f(x)g'''(x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{h'''(x)}{f(x)g(x)}=\frac{f'''(x)g(x)}{f(x)g(x)}+\frac{f(x)g'''(x)}{f(x)g(x)} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{h'''(x)}{h(x)}=\frac{f'''(x)}{f(x)}+\frac{g'''(x)}{g(x)}$$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \longrightarrow R$, για την οποία είναι:

$$f(x+\psi)=f(x)f(\psi) \quad (1), \quad \forall x,\psi\in R$$

α) Αν $\sigma(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$ (2), με $\lim\limits_{x\to 0}\sigma(x)=1$ (3), να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται.

β) Αν υπάρχει η $f'(0)$ και $f(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται.

Απόδειξη:

α) Είναι $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\overset{(2)}{=}f(x)\lim_{h\to 0}\sigma(h)\overset{(3)}{=}f(x)\cdot 1=f(x)$$

Άρα $f'(x)=f(x)$, $\forall x\in R$, δηλαδή η f παραγωγίζεται.

β) Έχουμε σαν υπόθεση ότι υπάρχει η $f'(0)$ και την (1).

Η (1) για $\chi=0$ δίνει: $f(\psi)=f(0)f(\psi) \Longrightarrow f(0)=1$ (4). Είναι:

$$f'(\chi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi)f(h)-f(\chi)}{h}=$$

$$=f(\chi)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\overset{(4)}{=}f(\chi)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(\chi)f'(0)$$

Άρα $f'(\chi)=f(\chi)f'(0)$, $\forall \chi\in\mathbf{R}$, επομένως η f παραγωγίζεται.

55. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(\chi)=(\chi^2+1)f(\chi)+3\chi$ (1).

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g;

β) Να δειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο R.

γ) Να δειχθεί ότι $g'(0)=3$.

Απόδειξη:

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το **R**, εφόσον είναι παραγωγίσιμη στο **R**. Οι συναρτήσεις h και σ με $h(\chi)=\chi^2+1$ και $\sigma(\chi)=3\chi$, ορίζονται στο **R**, άρα και η g, με $g(\chi)=(\chi^2+1)f(\chi)+3\chi$ ορίζεται στο **R**.

β) Επειδή οι συναρτήσεις f, h και σ είναι παραγωγίσιμες στο **R**,η g είναι παραγωγίσιμη στο **R**.

γ) Η (1) δίνει:

$$g'(\chi)=2\chi f(\chi)+(\chi^2+1)f'(\chi)+3 \Longrightarrow g'(0)=f'(0)+3 \quad (2)$$

Επειδή η f είναι άρτια είναι:

$$f(-\chi)=f(\chi),\ \forall \chi\in\mathbf{R} \Longrightarrow f'(-\chi)(-\chi)'=f'(\chi) \Longrightarrow -f'(-\chi)=f'(\chi) \quad (3)$$

Η (3) για $\chi=0$ δίνει $-f'(0)=f'(0) \Longrightarrow 2f'(0)=0 \Longrightarrow f'(0)=0$. Έτσι η (2) δίνει $g'(0)=3$.

****56. Αν μια συνάρτηση f παραγωγίζεται στο σημείο $\chi=\chi_0$, τότε:**

α) $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{\chi_0 f(\chi)-\chi f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\chi_0 f'(\chi_0)-f(\chi_0)$

β) $\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{2h}=f'(\chi_0)$

(Πανεπιστήμιο Αθηνών τμηματικές εξετάσεις)

Απόδειξη:

α) Είναι: $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{\chi_0 f(\chi)-\chi f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{\chi_0 f(\chi)-\chi_0 f(\chi_0)+\chi_0 f(\chi_0)-\chi f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=$

$$=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{\chi_0[f(\chi)-f(\chi_0)]-f(\chi_0)(\chi-\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{\chi_0[f(\chi)-f(\chi_0)]}{\chi-\chi_0}-\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi_0)(\chi-\chi_0)}{\chi-\chi_0}=$$

$$=\chi_0\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}-\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi_0)=\chi_0 f'(\chi_0)-f(\chi_0)$$

β) $\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)+f(\chi_0)-f(\chi_0-h)}{2h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0)-f(\chi_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0)-f(\chi_0-h)}{h}=\frac{1}{2}f'(\chi_0)+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0)-f(\chi_0-h)}{h} \quad (1)$$

Θέτουμε $\chi_0-h=\omega$. Άρα $h=\chi_0-\omega$. Όταν $h\longrightarrow 0$, τότε $\omega\longrightarrow\chi_0$. Έτσι το $\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0)-f(\chi_0-h)}{h}$, γράφεται $\lim_{\omega\to\chi_0}\frac{f(\chi_0)-f(\omega)}{\chi_0-\omega}=\lim_{\omega\to\chi_0}\frac{f(\omega)-f(\chi_0)}{\omega-\chi_0}=f'(\chi_0)$. Επομένως η (1) δίνει: $\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}f'(\chi_0)+\frac{1}{2}f'(\chi_0)=f'(\chi_0)$.

***** 57. α) Δίνεται η συνάρτηση f: R ⟶ R, για την οποία ισχύει:**

$$f(\chi+\psi)+\psi=f(\chi)+3^\chi(3^\psi-1) \quad (1),\ \forall \chi,\psi\in\mathbf{R}$$

Να δειχθεί ότι $f'(\chi)=3^\chi\ln 3-1$.

β) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R και

$$f(\chi+\psi)-g(\chi+\psi)=f(\chi)-g(\chi) \quad (1),\ \forall \chi,\psi\in\mathbf{R},$$

να δειχθεί ότι $f'(\chi)=g'(\chi)$, $\forall\chi\in\mathbf{R}$.

(Armando Rosa "Algebra")

Απόδειξη:

α) Είναι $f'(\chi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(\chi)+3^\chi(3^h-1)-h-f(\chi)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3^\chi(3^h-1)-h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3^\chi(3^h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=3^\chi\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}-\lim_{h\to 0}1=3^\chi\lim_{h\to 0}\frac{e^{\ln 3^h}-1}{h}-1=$$

$$=3^\chi\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln 3}-1}{h}-1=3^\chi\ln 3\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln 3}-1}{h\ln 3}-1 \quad (1)$$

Θέτουμε $h\ln 3=\omega$. Όταν $h\longrightarrow 0$, τότε $\omega\longrightarrow 0$, έτσι έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln 3}-1}{h\ln 3}=\lim_{\omega\to 0}\frac{e^\omega-1}{\omega}=1$$

Η (1) δίνει: $f'(\chi)=3^\chi(\ln 3)1-1$

β) Η (1) γράφεται: $f(\chi+h)-f(\chi)=g(\chi+h)-g(\chi)$ (θέσαμε όπου ψ το h) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}=\frac{g(\chi+h)-g(\chi)}{h}\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(\chi+h)-g(\chi)}{h}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(\chi)=g'(\chi)$$

****58. Δίνεται η συνάρτηση f: R ⟶ R, τέτοια που:**

$$[f(\chi)+\chi][f(\psi)+\psi]=f(\chi+\psi)+\chi+\psi \quad (1),\ \forall\chi,\psi\in\mathbf{R}$$

Αν $f(1)=\pi-1$ (2) και η f παραγωγίζεται στο R, να δειχθεί ότι:

α) $f(0)=1$

β) $f(x)\neq -x,\ \forall x\in R$

γ) $[f'(x)+1][f(\psi)+\psi]=[f'(\psi)+1][f(x)+x],\ \forall x,\psi\in R$

(Rey Pastor "Analisis Matemâtico")

Απόδειξη:

α) Η (1) για $x=0$, $\psi=1$, δίνει:

$$f(0)[f(1)+1]=f(1)+1 \xrightarrow{(2)} f(0)[\pi-1+1]=\pi-1+1 \Longrightarrow \pi f(0)=\pi \Longrightarrow f(0)=1$$

β) Υποθέτουμε ότι για ένα $x_0\in R$ είναι $f(x_0)=-x_0$. Η (1) δίνει για $\psi=-x_0$ και $f(x_0)=-x_0$: $(-x_0+x_0)[f(-x_0)-x_0]=f(x_0-x_0)+x_0-x_0 \Longrightarrow 0=f(0) \Longrightarrow 0=1$ που είναι αδύνατο.

γ) Η (1) παραγωγίζοντας με μεταβλητή το x, δίνει:

$$[f(x)+x]'[f(\psi)+\psi]=f'(x+\psi)(x+\psi)'+x' \Longrightarrow [f'(x)+1][f(\psi)+\psi]=f'(x+\psi)+1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε την (1) με μεταβλητή το ψ, βρίσκουμε ότι:

$$[f'(\psi)+1][f(x)+x]=f'(x+\psi)+1 \quad (4)$$

Από (3) και (4) προκύπτει: $[f'(x)+1][f(\psi)+\psi]=[f'(\psi)+1][f(x)+x]$.

59. Αν οι συναρτήσεις f+g και f-g είναι παραγωγίσιμες στο A, να δειχθεί ότι:

α) Η f·g είναι παραγωγίσιμη στο A

β) Η f/g είναι παραγωγίσιμη στο $A^*=A-\{x\in A\ /\ g(x)=0\}$.

(Bacalaureat Montréal)

Απόδειξη: Έστω $h=f+g$ (1) και $\varphi=f-g$ (2). Οι (1) και (2) δίνουν:

$$\left(f=\frac{h+\varphi}{2},\ g=\frac{h-\varphi}{2}\right) \quad (3)$$

α) Είναι: $$f\cdot g \overset{(3)}{=\!=} \left(\frac{h+\varphi}{2}\right)\left(\frac{h-\varphi}{2}\right)$$

Επειδή οι h και φ είναι παραγωγίσιμες στο A, οι h+φ και h-φ είναι παραγωγίσιμες στο A (σαν άθροισμα και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων). Άρα και οι συναρτήσεις $\frac{h+\varphi}{2}$, $\frac{h-\varphi}{2}$ είναι παραγωγίσιμες, επομένως και η $\left(\frac{h+\varphi}{2}\right)\left(\frac{h-\varphi}{2}\right)$, δηλαδή η f·g είναι παραγωγίσιμη στο A.

β) Είναι: $$\frac{f}{g}=\frac{h+\varphi/2}{h-\varphi/2}=\frac{h+\varphi}{h-\varphi} \quad (4)$$

Επειδή οι h+φ και h-φ είναι παραγωγίσιμες στο A, η $\frac{h+\varphi}{h-\varphi}$ είναι παραγωγίσιμη στο A*. Άρα η συνάρτηση f/g είναι παραγωγίσιμη στο A*.

60. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^x$ (1), με $f(x)g(x)\neq 0,\ \forall x\in R$. **Να δειχθεί ότι:**

$f^2(x)[g(x)+g'(x)]+g^2(x)[f(x)+f'(x)]=0$ (2) (Caseta Matematica)

Απόδειξη: Η αποδεικτέα γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{f^2(x)[g(x)+g'(x)]}{f^2(x)g^2(x)}+\frac{g^2(x)[f(x)+f'(x)]}{f^2(x)g^2(x)}=0 \Longleftrightarrow \frac{g(x)+g'(x)}{g^2(x)}+\frac{f(x)+f'(x)}{f^2(x)}=0$$

$$\Longrightarrow \frac{g(x)}{g^2(x)}+\frac{g'(x)}{g^2(x)}+\frac{f(x)}{f^2(x)}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{g(x)}+\frac{1}{f(x)}=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \quad (3)$$

Η (1) δίνει: $$\left[\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\right]'=(e^x)' \Longleftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]'+\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=e^x \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]'+\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)} \Longleftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{g^2(x)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

Έτσι δείξαμε την (3).

**** 61. Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι: α) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)+f(\beta)g(\alpha)$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$**

β) $g(\alpha+\beta)=g(\alpha)g(\beta)-f(\alpha)f(\beta)$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$

γ) $f(0)=0$, $g(0)=1$

δ) Υπάρχει $f'(0)$ και $g'(0)$, με $f'(0)=1$, $g'(0)=0$.

Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$, με $f'(x)=g(x)$ και ότι η g παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$, με $g'(x)=-f(x)$. (Θέμα εξετάσεων)

Απόδειξη: Είναι: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(h)-1}{h}+\frac{f(h)-0}{h}g(x)\right]=\lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(h)-g(0)}{h}+\frac{f(h)-f(0)}{h}g(x)\right]=$$

$$=f(x)g'(0)+f'(0)g(x)=g(x) \Longrightarrow f'(x)=g(x)$$

Έχουμε ακόμα: $$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-f(x)f(h)-g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{g(h)-1}{h}-f(x)\frac{f(h)-0}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{g(h)-g(0)}{h}-f(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\right]=$$

$$=g(x)g'(0)-f(x)f'(0)=-f(x) \Longrightarrow g'(x)=-f(x)$$

**** 62.** α) **Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f και g. Αν $f(x)=x+\alpha$ ($\alpha\in R^*$) και $f\circ g=g\circ f$, τότε να δειχθεί ότι η συνάρτηση g' είναι περιοδική με περίοδο α.**

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A\longrightarrow A$ και $g: A\longrightarrow A$ ($A\subseteq R$), που

είναι παραγωγίσιμες στο A και αντιστρέψιμες στο A. Αν $f'=g^{-1}$ (1), $g'=f^{-1}$ (2), να δειχθεί ότι:

$$[(f\circ g+g\circ f)(x)]'=x[(f+g)(x)]'$$

Απόδειξη:

α) Είναι $f\circ g=g\circ f \Longrightarrow (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x) \Longrightarrow f(g(x))=g(f(x)) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow g(x)+\alpha=g(x+\alpha) \xrightarrow{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.} g'(x)+\alpha'=g'(x+\alpha)(x+\alpha)' \Longrightarrow g'(x)=g'(x+\alpha)\ \forall x\in R$

Άρα η g' είναι περιοδική με περίοδο α.

β) Είναι $[(f\circ g+g\circ f)(x)]'=[(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)]'=[f(g(x))+g(f(x))]'=$

$=f'(g(x))g'(x)+g'(f(x))f'(x) \overset{(1),(2)}{=\!=\!=} g^{-1}(g(x))g'(x)+f^{-1}(f(x))f'(x)=$

$=(g^{-1}\circ g)(x)g'(x)+(f^{-1}\circ f)(x)f'(x)=xg'(x)+xf'(x)=x[g'(x)+f'(x)]=$

$$=x[g(x)+f(x)]'=x[(g+f)(x)]'$$

****63. Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R. Αν η f' είναι αντιστρέψιμη και η $(f')^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο R, να δειχθεί ότι:**

$$[I(f')^{-1}-f\circ[(f')^{-1}]]'=(f')^{-1}$$

(όπου I με $I(x)=x$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση).

Απόδειξη: Έστω ότι $\psi=f'(x)$ (1), τότε είναι:

$$(f')^{-1}(\psi)=x \Longrightarrow [[(f')^{-1}](\psi)]'=x' \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow [(f')^{-1}]'(\psi)\psi'=1 \Longrightarrow [(f')^{-1}]'(\psi)=\dfrac{1}{\psi'} \xrightarrow{(1)} [(f')^{-1}]'(\psi)=\dfrac{1}{f''(x)}$ (2)

Είναι ακόμα:

$[f\circ(f')^{-1}]'=[f'\circ[(f')^{-1}]][(f')^{-1}]' \overset{(2)}{=\!=\!=} [f'\circ[(f')^{-1}]]\dfrac{1}{f''}=I\dfrac{1}{f''}$ (διότι $f'\circ(f')^{-1}=I$ (ταυτοτική συνάρτηση)). Άρα:

$$[f\circ(f')^{-1}]'=I\frac{1}{f''} \qquad (3)$$

Επομένως $[I(f')^{-1}-f\circ[(f')^{-1}]]'=I'(f')^{-1}+I[(f')^{-1}]'-[f\circ[(f')^{-1}]]' \overset{(2),(3)}{=\!=\!=}$

$$=(f')^{-1}+I\frac{1}{f''}-I\frac{1}{f''}=(f')^{-1}$$

****64. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$. Να δειχθεί ότι η ρ τάξεως παράγωγος της δίνεται από την ισότητα:**

$$f^{(\rho)}(x)=\rho!\sum_{\kappa=\rho}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho)!}x^{\kappa-\rho} \quad (A),\quad \rho=1,2,3,\ldots,\nu. \qquad (\theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha)$$

Απόδειξη: Για ρ=1, η (A) δίνει:

$$f'(x)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{1!(\kappa-1)!}x^{\kappa-1}=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\kappa x^{\kappa-1}=\alpha_1+2\alpha_2x+3\alpha_3x^2+\ldots+\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}$$

που ισχύει, εφόσον $f'(x)=\alpha_1+2\alpha_2x+3\alpha_3x^2+\ldots+\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η:

$$f^{(\rho)}(x)=\rho!\sum_{\kappa=\rho}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho)!}x^{\kappa-\rho} \qquad (I)$$

Θα δείξουμε ότι η $f^{(\rho+1)}(x)=(\rho+1)!\sum_{\kappa=\rho+1}^{\nu}\alpha_\kappa\dfrac{\kappa!}{(\rho+1)!(\kappa-\rho-1)!}x^{\kappa-\rho-1}$ (II) ισχύει.

Η (I) αν την παραγωγίσουμε, δίνει:

$$[f^{(\rho)}(x)]'=\rho!\sum_{\kappa=\rho}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho)!}(\kappa-\rho)x^{\kappa-\rho-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f^{(\rho+1)}(x)=\rho!\sum_{\kappa=\rho}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho-1)!}x^{\kappa-\rho-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f^{(\rho+1)}(x)=\frac{\rho!(\rho+1)}{\rho+1}\sum_{\kappa=\rho}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho-1)!}x^{\kappa-\rho-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f^{(\rho+1)}(x)=\rho!(\rho+1)\sum_{\kappa=\rho+1}^{\nu}\frac{\alpha_\kappa}{\rho+1}\frac{\kappa!}{\rho!(\kappa-\rho-1)!}x^{\kappa-\rho-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f^{(\rho+1)}(x)=(\rho+1)!\sum_{\kappa=\rho+1}^{\nu}\alpha_\kappa\frac{\kappa!}{(\rho+1)!(\kappa-\rho-1)!}x^{\kappa-\rho-1}$$

****65. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}x^{\kappa+1}$ (1). Να δειχθεί ότι:**

α) $f'(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}x^\kappa=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$ (A)

β) $1+2\dfrac{\nu!}{1!(\nu-1)!}+3\dfrac{\nu!}{2!(\nu-2)!}+\ldots+(\nu+1)\dfrac{\nu!}{0!\nu!}=2^{\nu-1}(\nu+2)$

Απόδειξη:

α) Είναι: $(1+x)^\nu=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}x^\kappa$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $f(x)=(1+x)^\nu x$ (3)

Η (1) δίνει:

$$f'(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}(\kappa+1)x^{\kappa} \quad (4)$$

(3) δίνει:

$$f'(x)=\nu(1+x)^{\nu-1}x+(1+x)^{\nu}=(1+x)^{\nu-1}[\nu x+1+x]=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x] \quad (5)$$

Από (4) και (5) προκύπτει η αποδεικτέα.

β) Η (Α) για $x=1$, δίνει:

$$2^{\nu-1}(\nu+2)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} \iff$$

$$\iff 2^{\nu-1}(\nu+2)=1+2\frac{\nu!}{1(\nu-1)!}+3\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}+\dots+(\nu+1)\frac{\nu!}{0!\nu!}$$

**** 66. α) Θεωρούμε το ν-στού βαθμού πολυώνυμο $f(x)$, με ρίζες $\rho_1,\rho_2,\dots,$ διάφορες μεταξύ τους πραγματικές.**

Να δειχθεί ότι οι ρίζες του $f(x)$ δεν είναι ρίζες της παραγώγου του.

β) Να δειχθεί ότι αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες απλές πραγματικές, τότε το πολυώνυμο $g(x)=[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ δεν έχει ρίζες πραγματικές. **(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.)**

όδειξη:

α) Είναι $f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)$, με $\alpha_\nu\neq 0$ και:

$$(x)=\alpha_\nu(x-\rho_2)(x-\rho_3)\dots(x-\rho_\nu)+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_3)\dots(x-\rho_\nu)+\dots+$$
$$+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_{\nu-1}) \quad (1)$$

(1) για $x=\rho_1$, δίνει $f'(\rho_1)=\alpha_\nu(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\dots(\rho_1-\rho_\nu)\neq 0$ (εφόσον οι ρί-ες του $f(x)$ είναι διάφορες μεταξύ τους).

Ανάλογα δείχνουμε ότι $f'(\rho_2)\neq 0$, $f'(\rho_3)\neq 0$, ..., $f'(\rho_\nu)\neq 0$.

β) Έστω ότι οι ρίζες του $f(x)$ είναι ρ_1, ρ_2, ..., ρ_ν και ρ η τυχαία π' αυτές. Θα δείξουμε ότι $g(\rho)\neq 0$.

Είναι: $g(\rho)=[f'(\rho)]^2-f(\rho)f''(\rho)=[f'(\rho)]^2$ (1)

ίναι όμως, $f'(\rho)\neq 0$, γιατί οι απλές ρίζες ενός πολυωνύμου δεν είναι ρί-ες της παραγώγου του. Επομένως από (1) έχουμε $g(\rho)\neq 0$. Θα δείξουμε, τώρα τι το $g(x)$ δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbf{R}-\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu\}$. Είναι:

$$f(x)=\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)$$

με κ σταθερά), οπότε:

$$f'(x)=\kappa(x-\rho_2)(x-\rho_3)\dots(x-\rho_\nu)+\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_3)\dots(x-\rho_\nu)+$$
$$+\dots+\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_{\nu-1}) \implies \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\dots+\frac{1}{x-\rho_\nu} \implies$$

$$\xrightarrow{\text{παραγ.}} \frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=-\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2}+\frac{1}{(x-\rho_2)^2}+\dots+\frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right] \implies$$

$$\implies g(x)=[f'(x)]^2-f(x)f''(x)=[f(x)]^2\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2}+\frac{1}{(x-\rho_2)^2}+\dots+\frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right] \quad (2)$$

Το δεύτερο μέλος της (2) είναι θετικό $\forall x\in\mathbf{R}-\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu\}$, επομένως το $g(x)$ δεν έχει ρίζες ούτε στο σύνολο $\mathbf{R}-\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu\}$.

Άρα το $g(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbf{R}$.

67. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=F(x)|x-3|$, όπου $F(x)$ είναι πολυώνυμο νιοστού βαθμού. Αν η f παραγωγίζεται στο $\mathbf{R}$, να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $F(x)$ έχει ρίζα $\rho=3$.

Απόδειξη: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, θα είναι και στο σημείο $x_0=3$. Άρα: $f'_\alpha(3)=f'_\delta(3)$ (1)

Είναι: $f'_\alpha(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{F(x)|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{F(x)(-x+3)}{x-3}=-F(3)$

και: $f'_\delta(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{F(x)|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{F(x)(x-3)}{x-3}=F(3)$

Από την (1) προκύπτει: $-F(3)=F(3) \iff 2F(3)=0 \iff F(3)=0$. Επομένως ο 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $F(x)$.

**** 68. α) Δείξτε ότι αν το πολυώνυμο $f(x)$ έχει τη ρίζα ρ με βαθμό πολλαπλότητας ν, τότε η παράγωγός του θα έχει την ίδια ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας $\nu-1$.**

β) Δίνεται η εξίσωση $2x^3+3x^2+6(2^{\alpha}-4)x=0$ $(\alpha\in\mathbf{R})$. Να δειχθεί ότι αν $1<\alpha<2$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. **(Bacalaureat Nice)**

Απόδειξη:

α) Αφού το $f(x)$ έχει τη ρίζα ρ, με βαθμό πολλαπλότητας ν, θα διαιρείται δια του $(x-\rho)^\nu$. Είναι:

$$f(x)=(x-\rho)^\nu\Pi(x) \quad (1), \text{ με } \Pi(\rho)\neq 0$$

Η σχέση (1) παραγωγιζόμενη δίνει:

$$f'(x)=\nu(x-\rho)^{\nu-1}\Pi(x)+(x-\rho)^\nu\Pi'(x) \implies f'(x)=(x-\rho)^{\nu-1}[\nu\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)]$$

θέτουμε $\nu\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)=\Pi_1(x)$ (είναι $\Pi_1(\rho)\neq 0$), οπότε:

$$f'(x)=(x-\rho)^{\nu-1}\Pi_1(x)$$

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι το πολυώνυμο $f'(x)$ έχει ρίζα ρ, με πολλαπλότητα $\nu-1$.

β) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=2x^3+3x^2+6(2^\alpha-4)x=0$ έχει μια διπλή ρίζα ρ στο διάστημα $(-1,1)$, τότε η $f'(x)=0$ θα έχει απλή την ίδια ρίζα στο ίδιο διάστημα. Είναι:

$$g(x)=f'(x)=6x^2+6x+6(2^\alpha-4),\ \text{άρα}\ g(x)=6(x^2+x+2^\alpha-4)$$

Έχουμε: $g(1)=6(1+1+2^\alpha-4)=6(2^\alpha-2)$ και $g(-1)=6(1-1+2^\alpha-4)=6(2^\alpha-4)$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, αν $g(-1)g(1)<0$, τότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. Είναι:

$$g(-1)g(1)<0 \iff 6(2^\alpha-2)6(2^\alpha-4)<0 \iff (2^\alpha-2)(2^\alpha-2-2)<0 \qquad (1)$$

Θέτουμε στην (1) $2^\alpha-2=\psi$, οπότε:

$$\psi(\psi-2)<0 \iff 0<\psi<2$$

Άρα: $\quad 0<2^\alpha-2<2 \iff 2<2^\alpha<4 \iff 2^1<2^\alpha<2^2 \iff 1<\alpha<2$

69. Αν ρ είναι κοινή ρίζα ενός πολυωνύμου f(x) βαθμού ν (ν≥1) και της παραγώγου του, τότε το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του f(x).

(Πόρισμα Θεωρήματος)

Απόδειξη: Επειδή ρ είναι ρίζα του $f(x)$ το $x-\rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. Επομένως είναι: $\quad f(x)=(x-\rho)\Pi(x) \quad (1)$

(όπου $\Pi(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu-1$). Η (1) δίνει:

$$f'(x)=\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x) \qquad (2)$$

Επειδή ρ είναι ρίζα του $f'(x)$, το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $f'(x)$. Άρα:

$$f'(x)=(x-\rho)\sigma(x) \qquad (3)$$

(όπου $\sigma(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu-2$). Από (2) και (3) προκύπτει:

$$(x-\rho)\sigma(x)=\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x) \xrightarrow{x=\rho} 0=\Pi(\rho) \qquad (4)$$

Η (4) σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $\Pi(x)$, άρα:

$$\Pi(x)=(x-\rho)h(x) \qquad (5)$$

Η (1), δυν. (5) δίνει $f(x)=(x-\rho)^2h(x)$, δηλαδή το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

****70. Να δειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο f(x), ν-στού βαθμού μπορεί να πάρει τη μορφή:**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_\nu x^\nu \quad (\nu\in N^*) \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$f'(x)=\alpha_1+2\alpha_2x+3\alpha_3x^2+4\alpha_4x^3+\ldots+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\nu\alpha_\nu x^{\nu-1} \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=2\alpha_2+2\cdot3\alpha_3x+3\cdot4\alpha_4x^2+4\cdot5\alpha_5x^3+\ldots+(\nu-1)(\nu-2)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-3}+\nu(\nu-1)\alpha_\nu x^{\nu-2} \quad (3)$$

Η τρίτης τάξης παράγωγος είναι:

$$f'''(x)=2\cdot3\alpha_3+2\cdot3\cdot4\alpha_4x+3\cdot4\cdot5\alpha_5x^2+\ldots+$$
$$+(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-4}+\nu(\nu-1)(\nu-2)\alpha_\nu x^{\nu-3} \qquad (4)$$

Η ν-στής τάξεως παράγωγος είναι:

$$f^{(\nu)}(x)=\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot\alpha_\nu=\nu!\alpha_\nu \qquad (\nu)$$

Για $x=0$ έχουμε από τις (1), (2), (3),..., (ν), ότι:

$$f(0)=\alpha_0 \implies \alpha_0=f(0)$$

$$f'(0)=\alpha_1=1!\alpha_1 \implies \alpha_1=\frac{f'(0)}{1!}$$

$$f''(0)=1\cdot2\cdot\alpha_2=2!\alpha_2 \implies \alpha_2=\frac{f''(0)}{2!}$$

$$f'''(0)=1\cdot2\cdot3\cdot\alpha_3=3!\alpha_3 \implies \alpha_3=\frac{f'''(0)}{3!}$$

$$f^{(4)}(0)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\alpha_4=4!\alpha_4 \implies \alpha_4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

....

$$f^{(\nu)}(0)=1\cdot2\cdot3\ldots(\nu-1)\nu\alpha_\nu=\nu!\alpha_\nu \implies \alpha_\nu=\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$$

Τις τιμές αυτές των $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αντικαθιστούμε στην (1), οπότε έχουμε:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu$$

****71. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$, με:**

$$\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0\neq0$$

Αν το πολυώνυμο f(x) έχει τέσσερεις ρίζες πραγματικές, που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε το f'(x) θα έχει τρεις ρίζες, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Απόδειξη: Έστω $x_1=\theta-3\omega$, $x_2=\theta-\omega$, $x_3=\theta+\omega$, $x_4=\theta+3\omega$ οι ρίζες του $f(x)$. Είναι:

$$f(x)=\alpha_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \implies$$

$$\implies f(x)=\alpha_4(x-\theta+3\omega)(x-\theta+\omega)(x-\theta-\omega)(x-\theta-3\omega) \implies$$

$$\implies f(x)=\alpha_4[(x-\theta)^2-9\omega^2][(x-\theta)^2-\omega^2] \implies f(x)=\alpha_4[(x-\theta)^4-10\omega^2(x-\theta)^2+9\omega^4] \implies$$

$$\implies f'(x)=\alpha_4[4(x-\theta)^3-20\omega^2(x-\theta)] \implies f'(x)=4\alpha_4(x-\theta)[(x-\theta)^2-5\omega^2] \implies$$

$$\implies f'(x)=4\alpha_4(x-\theta)(x-\theta-\sqrt5\,\omega)(x-\theta+\sqrt5\,\omega)$$

Άρα το $f'(x)$ έχει ρίζες $\theta-\sqrt{5}\,\omega$, θ, $\theta+\sqrt{5}\,\omega$, που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**** 72. α) Αν πολυωνυμική συνάρτηση είναι ν βαθμού, τότε η παράγωγός της είναι (ν-1) βαθμού.**

β) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Να δειχθεί ότι:

I) $f^{(\nu)}(x)=\dfrac{\varphi_\nu(x)}{(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$ (1), $\nu\in N^*$, όπου $\varphi_\nu(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού

II) $\varphi'_{\nu+1}(x)=(1+x^2)\varphi''_\nu(x)-(2\nu-1)x\varphi'_\nu(x)-(2\nu+1)\varphi_\nu(x)$

(Simmons F. "Modern Analysis")

Απόδειξη:

α) Αν φ, με $\varphi(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν, τότε $\alpha_\nu\neq0$. Είναι $\varphi'(x)=\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1$. Επειδή $\nu\alpha_\nu\neq0$, το πολυώνυμο $\varphi'(x)$ είναι ν-1 βαθμού.

β) I) Η (1) δείχνεται επαγωγικά. Για $x=1$, η (1) δίνει:

$$f'(x)=\frac{\varphi_1(x)}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}}$$

που ισχύει διότι $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\dfrac{-x}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}}=\dfrac{\varphi_1(x)}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}}$

Έστω ότι: $$f^{(\nu)}(x)=\frac{\varphi_\nu(x)}{(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\quad(2)$$

Θα δείξουμε ότι: $$f^{(\nu+1)}(x)=\frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{(1+x^2)^{\nu+1+\frac{1}{2}}}$$

Η (2) με παραγώγιση δίνει:

$$[f^{(\nu)}(x)]'=\left[\frac{\varphi_\nu(x)}{(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\right]'\Longrightarrow f^{(\nu+1)}(x)=\frac{\varphi'_\nu(x)(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}-\varphi_\nu(x)\left[(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]'}{\left[(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\left[\varphi'_\nu(x)(1+x^2)-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)x\right]}{(1+x^2)^{2\nu+1}}=$$

$$=\frac{\varphi'_\nu(x)(1+x^2)-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)x}{(1+x^2)^{\nu+1+\frac{1}{2}}}=\frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{(1+x^2)^{\nu+1+\frac{1}{2}}}$$

(όπου $\varphi_{\nu+1}(x)=\varphi'_\nu(x)(1+x^2)-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)x$ πολυώνυμο ν+1 βαθμού).

II) Είναι $\varphi_{\nu+1}(x)=\varphi'_\nu(x)(1+x^2)-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)x$, με παραγώγιση έχουμε:

$$\varphi'_{\nu+1}(x)=(1+x^2)\varphi''_\nu(x)+2x\varphi'_\nu(x)-\varphi'_\nu(x)(2\nu+1)x-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)\iff$$

$$\iff\varphi'_{\nu+1}(x)=(1+x^2)\varphi''_\nu(x)-\varphi'_\nu(x)x(2\nu-1)-\varphi_\nu(x)(2\nu+1)$$

73. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, με

$$f(x)=\text{εφ}x+\text{σφ}x$$

στο σημείο με τετμημένη $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Λύση: Είναι $f'(x)=(\text{εφ}x)'+(\text{σφ}x)'=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}-\dfrac{1}{\text{ημ}^2x}$. Άρα:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\text{συν}^2\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{\text{ημ}^2\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}-\frac{1}{\frac{3}{4}}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

και: $$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\text{εφ}\frac{\pi}{3}+\text{σφ}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{\pi}{3},f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ είναι:

$$\psi=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\iff\psi=\frac{4\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

74. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f, με τύπο $f(x)=x^3-1$, που έχει συντελεστή διευθύνσεως λ=1.

Λύση: Είναι $\lambda=f'(x_0)=1$ και $f'(x)=(x^3-1)'=3x^2$, οπότε $f'(x_0)=3x_0^2$. Επομένως

$$3x_0^2=1\Longrightarrow x_0=\frac{1}{\pm\sqrt{3}}$$

Αν $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, τότε: $\psi_0=f(x_0)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-1$

Αν $x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, τότε: $\psi_0=f(x_0)=f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-1$

Έτσι έχουμε δυο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2), με εξισώσεις:

$$\psi-\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-1\right]=1\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

και: $$\psi-\left[\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3-1\right]=1\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

75. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f, με τύπο $f(x)=x^2-3x$, όταν αυτή σχηματίζει με τη διεύθυνση του ημιάξονα Ox γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

Λύση: Είναι $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=f'(x_0) \Longrightarrow 1=2x_0-3 \Longrightarrow x_0=2$. Για $x_0=2$, ο τύπος της f δίνει $\psi_0=f(x_0)=x_0^2-3x_0=2^2-3\cdot2=-2$. Άρα:

$$\psi-\psi_0=f'(x_0)(x-x_0) \Longleftrightarrow \psi+2=1(x-2)$$

76. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in R$. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διευθύνσεως 2, να εφάπτεται του διαγράμματος της f στο σημείο M(1,2).

Λύση: Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διευθύνσεως 2 δίνεται από την εξίσωση $\psi-0=2(x-0) \Longleftrightarrow \psi=2x$ (1). Θέλουμε η (1) να εφάπτεται του διαγράμματος της f στο σημείο M(1,2).

Η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f (στο σημείο M) είναι $\psi-2=f'(1)(x-1)$ (2). Είναι $f'(x)=2x+\alpha \Longleftrightarrow f'(1)=2+\alpha$ (3). Η (2) δυν. (3) γράφεται:

$$\psi-2=(2+\alpha)(x-1) \Longrightarrow \psi=2+2x+\alpha x-2-\alpha \Longrightarrow \psi=(2+\alpha)x-\alpha \quad (3)$$

Θέλουμε η (3) να ταυτίζεται με την (1), άρα πρέπει $\alpha=0$.

Επειδή το διάγραμμα της f περνά από το σημείο M(1,2), θα ισχύει:

$$2=1^2+\alpha\cdot1+\beta \Longrightarrow \alpha+\beta=1$$

Επειδή $\alpha=0$, θα είναι $\beta=1$.

**** 77. Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$, ώστε η f με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την ευθεία $\psi=x$.**

Λύση: Αν $M(x_0,\psi_0)$ είναι το σημείο επαφής, τότε αυτό θα βρίσκεται και στην εφαπτομένη ευθεία και στο διάγραμμα της f. Έτσι θα είναι:

$$f(x_0)=\psi_0=\alpha^{x_0} \quad \text{και} \quad \psi_0=x_0$$

Ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας $\psi=x$ είναι $\lambda=1$ και πρέπει να είναι ίσος με το συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης στο $M(x_0,\psi_0)$.

Είναι: $f'(x)=(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha \Longrightarrow f'(x_0)=\alpha^{x_0}\ln\alpha$

Άρα $\alpha^{x_0}\ln\alpha=1$. Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_0=\alpha^{x_0}\\ \psi_0=x_0\\ \alpha^{x_0}\ln\alpha=1\end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Έχουμε: $\left\{\begin{array}{l}\alpha^{x_0}=x_0\\ \alpha^{x_0}\ln\alpha=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha^{x_0}=x_0\\ x_0\ln\alpha=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_0\ln\alpha=\ln x_0\\ x_0\ln\alpha=1\end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\ln x_0=1\\ x_0\ln\alpha=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_0=e\\ e\ln\alpha=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \ln\alpha=\frac{1}{e} \Longrightarrow \alpha=e^{\frac{1}{e}}$

Άρα για $\alpha=e^{\frac{1}{e}}$, η $\psi=x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της f, στο σημείο:

$$(x_0,\psi_0)=(e,e)$$

78. Αν από το σημείο M(ξ,η) άγονται δυο εφαπτόμενες προς το διάγραμμα της f, με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε είναι $\alpha^2\xi^2+\alpha\beta\xi+\alpha\gamma-\alpha\eta>0$.

Λύση: Έστω (ε) η ευθεία που περνά από το σημείο M(ξ,η) και είναι εφαπτομένη στο διάγραμμα της f στο σημείο $N(x_0\ \ )$. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$\psi-\psi_0=f'(x_0)(x-x_0) \Longrightarrow \psi-\psi_0=(2\alpha x_0+\beta)(x-x_0)$$

Επειδή $M\in(\varepsilon)$, θα είναι:

$$\eta-\psi_0=(2\alpha x_0+\beta)(\xi-x_0) \quad (1)$$

Επειδή το N ανήκει και στο διάγραμμα της f, θα έχουμε:

$$\psi_0=\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\eta-(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)=(2\alpha x_0+\beta)(\xi-x_0) \Longleftrightarrow \alpha x_0^2-2\alpha\xi x_0-(\beta\xi+\gamma-\eta)=0 \quad (3)$$

Η (3) πρέπει να έχει δυο ρίζες πραγματικές άνισες. Επομένως:

$$\Delta>0 \Longleftrightarrow 4\alpha^2\xi^2-4\alpha(-\beta\xi-\gamma+\eta)>0 \Longleftrightarrow \alpha^2\xi^2+\alpha\beta\xi+\alpha\gamma-\alpha\eta>0$$

79. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{7x^2+\lambda x+\mu}{x^2+2x-3}$, $\lambda,\mu\in R$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε το διάγραμμα της f να περνά από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη του στο $x_0=-2$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Λύση: Για να περνά το διάγραμμα της f από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$$0=\frac{\mu}{-3} \Longleftrightarrow \mu=0$$

Είναι: $$f'(x)=\frac{(7x^2+\lambda x)'(x^2+2x-3)-(x^2+2x-3)'(7x^2+\lambda x)}{(x^2+2x-3)^2}=$$

$$=\frac{(14x+\lambda)(x^2+2x-3)-(2x+2)(7x^2+\lambda x)}{(x^2+2x-3)^2}$$

Επομένως: $f'(x_0)=f'(-2)=\frac{(-28+\lambda)(-3)-(-2)(28-2\lambda)}{9}=\frac{140-7\lambda}{9}$

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x, πρέπει να έχει

συντελεστή διευθύνσεως ίσο με 0. Άρα:

$$f'(-2)=0 \iff \frac{140-7\lambda}{9}=0 \iff \lambda=20$$

80. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α, ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{1}{4}(\alpha x-x^3)$ να τέμνει τον άξονα x΄x υπό γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.

Λύση: Το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα των x στα σημεία που έχουν σαν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{4}(\alpha x-x^3)=0 \iff x(\alpha-x^2)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\sqrt{\alpha} \\ x_3=\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

α) Έστω ότι α=0, τότε το μοναδικό σημείο είναι το M με τετμημένη το 0.

β) Αν α<0, τότε $-\sqrt{\alpha}\notin R$ και $\sqrt{\alpha}\notin R$.

γ) Αν α>0, τότε έχουμε τρια σημεία M_1, M_2 και M_3 με τετμημένες αντίστοιχα $-\sqrt{\alpha}$, 0 και $\sqrt{\alpha}$.

Για να τέμνει το διάγραμμα της f τον άξονα x΄x υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$, πρέπει η εφαπτομένη ευθεία του διαγράμματος της f στο κάθε σημείο που το διάγραμμα συναντά τον άξονα x΄x, να έχει συντελεστή διευθύνσεως $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$.

Είναι: $$f'(x)=\frac{1}{4}(\alpha-3x^2)$$

Άρα για $x_1=0$: $f'(0)=1 \implies \frac{1}{4}(\alpha-3\cdot 0^2)=1 \iff \alpha=4$

Για $x_2=-\sqrt{\alpha}$: $f'(-\sqrt{\alpha})=1 \implies \frac{1}{4}(\alpha-3\alpha)=1 \implies \alpha=-2$ (αδύνατο διότι α>0)

Για $x_3=\sqrt{\alpha}$: $f'(\sqrt{\alpha})=1 \implies \frac{1}{4}(\alpha-3\alpha)=1 \implies \alpha=-2$ (αδύνατο διότι α>0)

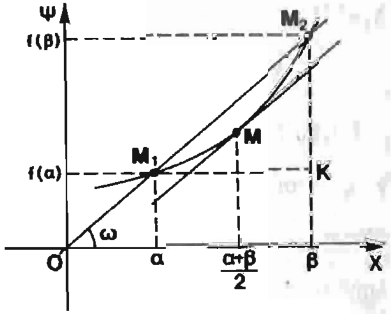
Άρα για α=4 το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα των x με γωνία ω=π/4

81. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Να δειχθεί ότι η χορδή που περνά από τα σημεία M_1, M_2 του διαγράμματος της f, με τετμημένες α και β, αντίστοιχα είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο M του διαγράμματός της με τετμημένη $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της χορδής M_1M_2 είναι ίσος με τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης στο M. Από το σχήμα είναι:

$$\lambda_{(M_1M_2)}=\varepsilon\varphi\omega=\frac{(KM_2)}{(M_1K)}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\beta-\alpha^2-\alpha^2-\beta}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+\alpha)}{(\beta-\alpha)}=2\alpha+\beta$$



Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο σημείο M, με τετμημένη $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι $f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\alpha=\alpha+\beta+\alpha=2\alpha+\beta$.

Άρα $\lambda_{(M_1M_2)}=\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau.}$

82. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$, $x\in R$.

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει κατακόρυφη εφαπτομένη του διαγράμματος της

β) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Απόδειξη:

α) Είναι $f'_\alpha(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=-\infty$

και: $$f'_\delta(2)=\ldots=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=+\infty$$

Άρα η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη εφαπτομένη.

β) Η οριζόντια εφαπτομένη έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=0=f'(x_o)$. Είναι: $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$. Επομένως έχουμε:

$$f'(x_o)=0 \iff \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x_o-2}}=0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο **R**. Άρα δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη

83. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των διαγραμμάτων των συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ και να δειχθεί ότι για x=0 ή x=2/3, οι εφαπτόμενες στα αντίστοιχα σημεία τους είναι παράλληλες.

Λύση: Τα διαγράμματα των δυο συναρτήσεων έχουν κοινά σημεία με συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} \psi=x^2 \\ \psi=x^3 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Το (Σ) δίνει (x=0,ψ=0) ή (x=1,ψ=1).

Υποθέτουμε ότι για $x=x_o$ οι εφαπτόμενες των διαγραμμάτων των συναρτήσεων είναι παράλληλες.

Οι αντίστοιχοι συντελεστές διευθύνσεως των δυο εφαπτομένων θα είναι

$\lambda_1=f'(x_o)=2x_o$ και $\lambda_2=g'(x_o)=3x_o^2$. Πρέπει $\lambda_1=\lambda_2$, άρα:

$$2x_o=3x_o^2 \Longrightarrow 3x_o^2-2x_o=0 \Longrightarrow x_o(3x_o-2)=0 \Longrightarrow (x_o=0 \text{ ή } x_o=2/3)$$

84. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία με τεταγμένη 1 του διαγράμματος της συνάρτησης g, με $g(x)=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, περνούν από την αρχή των αξόνων.

Απόδειξη: Είναι: $g'(x)=\dfrac{(1+3x^2)'(3+x^2)-(1+3x^2)(3+x^2)'}{(3+x^2)^2}=$

$$=\frac{6x(3+x^2)-(1+3x^2)2x}{(3+x^2)^2}=\frac{18x+6x^3-2x-6x^3}{(3+x^2)^2}=\frac{16x}{(3+x^2)^2}$$

Τα σημεία με τεταγμένη 1 έχουν τετμημένες τις πραγματικές λύσεις της εξίσωσης: $1=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2} \Longleftrightarrow 3+x^2=1+3x^2 \Longleftrightarrow 2=2x^2 \Longleftrightarrow x=\pm1$

Άρα οι εφαπτόμενες του διαγράμματος της g στα σημεία με τεταγμένη 1 είναι οι:

$$(\varepsilon_1):\ \psi-1=g'(1)(x-1)$$
$$(\varepsilon_2):\ \psi-1=g'(-1)(x+1)$$

δηλαδή οι: $\psi-1=\dfrac{16}{(3+1)^2}(x-1) \Longleftrightarrow \psi-1=x-1 \Longleftrightarrow \psi=x$ (1)

και: $\psi-1=\dfrac{-16}{[3+(-1)^2]^2}(x+1) \Longleftrightarrow \psi-1=-x-1 \Longleftrightarrow \psi=-x$ (2)

Οι (1) και (2) παριστάνουν ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων εφόσον το σημείο O(0,0) τις επαληθεύει.

85. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης f με $f(x)=1+\sqrt{|x-1|}$ στο σημείο M(1,1).

Λύση: Είναι: $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{-x+1}, & \text{αν } x\in(-\infty,1]\\ 1+\sqrt{x-1}, & \text{αν } x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Θα βρούμε τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης, δηλαδή τον παράγωγο αριθμό f'(1). Είναι:

$$f'_{\alpha}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1+\sqrt{-x+1}-1}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{-x+1}}=-\infty$$

και $$f'_{\delta}(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1+\sqrt{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

Επομένως η ευθεία x=1 είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της f, στο σημείο M(1,f).

86. Δίνονται οι συναρτήσεις f, με $f(x)=\alpha x^2+\beta x$ και g, με $g(x)=1/x$. Να προσδιοριστούν οι $\alpha,\beta\in R$, ώστε τα διαγράμματα των δυο συναρτήσεων να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης;

Λύση: Το κοινό σημείο επαφής έχει τεταγμένη $f(1)=g(1) \Longleftrightarrow \alpha+\beta=1$ (1).
Η κοινή εφαπτομένη στο σημείο M(1,f(1)) έχει συντελεστή διευθύνσεως:

$$f'(1)=g'(1) \Longleftrightarrow 2\alpha+\beta=-1 \quad (2)$$

Το σύστημα των (1) και (2) δίνει $(\alpha=-2,\beta=3)$. Είναι $f(x)=-2x^2+3x$, με $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$. Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι:

$$\psi-f(1)=f'(1)(x-1) \Longleftrightarrow \psi-1=-1(x-1)$$

87. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=e^x$, $g(x)=4-e^{\lambda-x}$. Να προσδιορισθεί ο $\lambda\in R$, ώστε τα διαγράμματα των f και g να εφάπτονται.

Λύση: Για να εφάπτονται τα διαγράμματα των f και g, πρέπει οι εφαπτόμενες στο κοινό σημείο τους να ταυτίζονται.

Επομένως αν $M(x_o,\psi_o)$ είναι το <u>κοινό</u> σημείο των δυο διαγραμμάτων θα είναι: $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}e^{x_o}=4-e^{\lambda-x_o}\\ e^{x_o}=e^{\lambda-x_o}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2e^{x_o}=4\\ e^{\lambda}=(e^{x_o})^2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x_o=\ln2\\ \lambda=2\ln2\end{cases}$$

88. Αν (ε): $\psi-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $\psi=f(x)$ στο σημείο $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε_1) του διαγράμματος της g, με τύπο $g(x)=f\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (1), στο σημείο $x_1=1$.

Λύση: Η (1) έχει συντελεστή διευθύνσεως λ=2. Άρα $f'(-1)=2$ (2).

Η $\psi-2x=0$, για $x=-1$, δίνει $\psi=-2$. Έτσι το σημείο επαφής είναι το M(-1,-2). Είναι $f(-1)=-2$ (3).

Η (1) για x=1, δίνει $g(1)=f(-1)\overset{(3)}{=\!=}-2$. Άρα το σημείο επαφής της εφαπτομένης στο διάγραμμα της g είναι M'(1,-2). Είναι:

$$g'(x)=f'\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=f'\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{x^3} \Longrightarrow g'(1)=f'\left(-\frac{1}{1^2}\right)\frac{2}{1^3}=2f'(-1)\overset{(2)}{=\!=}2\cdot2=4$$

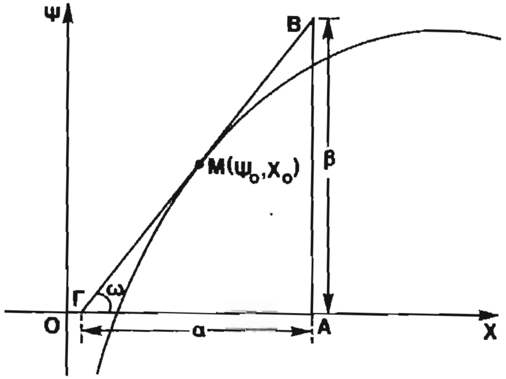
Άρα η εφαπτομένη (ε_1) έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda_1=4$. Έτσι η (ε_1) έχει εξίσωση $\psi+2=4(x-1)$.

89. Ορθογωνίου τριγώνου η υποτείνουσα εφάπτεται του διαγράμματος της

f, με $f(x)=\ln x$. Η μια κάθετη πλευρά έχει μήκος α (α>0) και βρίσκεται στον ημιάξονα Οx. Η άλλη κάθετη πλευρά έχει μήκος β (β>0). Να βρεθούν συναρτήσει των α,β οι συντεταγμένες του σημείου επαφής.

Λύση: Ο συντελεστής διευθύνσεως της ΒΓ είναι $\varepsilon\varphi\omega=\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$. Είναι $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$. Άρα: $\frac{1}{x_0}=\frac{\beta}{\alpha} \Longleftrightarrow x_0=\frac{\alpha}{\beta}$. Είναι ακόμα: $\psi_0=f(x_0)=\ln x_0=\ln\frac{\alpha}{\beta}$.

Άρα $M(x_0,\psi_0)=M\left(\frac{\alpha}{\beta},\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)$.



90. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, που έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο R, με $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$. Αν το διάγραμμα της g, με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x'x, τότε τον τέμνει υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Απόδειξη: Είναι: $g'(x)=\frac{f'(x)f'(x)-f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$ (1)

Έστω ότι η g τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $M(x_0,g(x_0))$, τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της g στο M έχει συντελεστή διευθύνσεως $g'(x_0)$

Η (1) δίνει: $g'(x_0)=\frac{[f'(x_0)]^2-f''(x_0)f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$ (2)

Επειδή $M\in(x'x)$ είναι $g(x_0)=0$. Άρα:

$$g(x_0)=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0 \Longrightarrow f(x_0)=0$$

Η (2) δίνει: $g'(x_0)=\frac{[f'(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^2}=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

Επειδή ο συντελεστής διευθύνσεως $g'(x_0)$ της εφαπτομένης του διαγράμματος της g είναι 1, το διάγραμμα της g τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$.

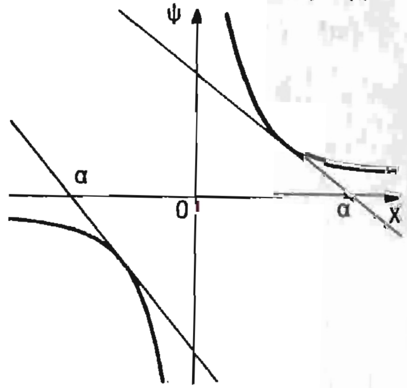
91. α) Να δειχθεί ότι από κάθε σημείο M(α,0), α≠0 του άξονα x'x διέρχεται μια μόνο εφαπτομένη στο διάγραμμα της συνάρτησης f, με $f(x)=\frac{1}{x}$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και g με $g(x)=\frac{x-1}{x}$. Να προσδιοριστούν τα α, β, έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση:

α) Έστω $M_0(x_0,\psi_0)$ το σημείο επαφής. Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης είναι $\lambda=f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. Επειδή η εφαπτομένη περνά από το M(α,0), θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ \psi-0=-\frac{1}{x_0^2}(x-\alpha).$$



Επειδή $M_0\in(\varepsilon)$ είναι:

$$\psi_0=-\frac{1}{x_0^2}(x_0-\alpha).$$

Έτσι έχουμε το σύστημα: $\begin{cases}\psi_0=\frac{1}{x_0}\\ \psi_0=-\frac{1}{x_0^2}(x_0-\alpha)\end{cases}$ που έχει τη μοναδική λύση $\left(x_0=\frac{\alpha}{2},\psi_0=\frac{2}{\alpha}\right)$. Άρα από το M(α,0) περνά μια μόνο εφαπτομένη με εξίσωση: $\psi-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) \Leftrightarrow \psi-\frac{2}{\alpha}=-\frac{4}{\alpha^2}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \psi=-\frac{4}{\alpha^2}x+\frac{4}{\alpha}$

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g πρέπει να έχουν κοινό σημείο με τετμημένη 1, δηλαδή πρέπει $f(1)=g(1)$ ή

$$\alpha+\beta+2=0 \qquad (1)$$

Εξάλλου για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο (1,f(1)), πρέπει να είναι $f'(1)=g'(1)$ ή, επειδή $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2}$,

$$2\alpha+\beta=1 \qquad (2)$$

Από το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε α=3, β=-5.

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινό σημείο το (1,0) και κοινή εφαπτομένη την ευθεία $\psi-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλαδή την:

$$\psi=x-1.$$

92. α) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0>0$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} g(x)\text{συν}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Αν $g(0)=g'(0)=0$, να δειχθεί ότι $f'(0)=0$.

Λύση:

α) Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{[f(x)-f(x_0)][f(x)+f(x_0)]}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+f(x_0)]=f'(x_0)[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+f(x_0)]=$

$=f'(x_0)[f(x_0)+f(x_0)]=2f(x_0)f'(x_0)$.

(Η f είναι συνεχής στο x_0 ως παραγωγίσιμη σ' αυτό, άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$).

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\text{συν}\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\text{συν}\dfrac{1}{x}$ (1)

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$ (2)

Είναι και $\left|\dfrac{g(x)}{x}\text{συν}\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\cdot 1$ (3)

Λόγω της (2) η (3) δίνει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\text{συν}\dfrac{1}{x}=0$.

Επομένως η (1) δίνει: $f'(0)=0$.

93. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους. Έστω ακόμη ότι είναι $g(x_0)\neq 0$ και $g'(x_0)\neq 0$. Αν για τη συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι $F'(x_0)=0$, να αποδειχθεί ότι $F(x_0)=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Λύση:

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Επειδή τώρα $g(x_0)\neq 0$, θα υπάρχει διάστημα Δ κέντρου x_0, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να είναι $g(x)\neq 0$. Για κάθε τέτοιο x ορίζεται η συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, θα είναι:

$$F'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ή, λόγω της $F'(x_0)=0$, $g(x_0)f'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)$

Από την ισότητα αυτή, επειδή $g(x_0)\neq 0$, $g'(x_0)\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=F(x_0).$$

94. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa+1}$. Να δειχθεί ότι:

α) $f'(x)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa}=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$,

β) $1+2\binom{\nu}{1}+\ldots+(\nu+1)\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu-1}(\nu+2)$.

Λύση:

α) Από το διώνυμο του Newton έχουμε: $(1+x)^{\nu}=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa}$ και συνεπώς

$$f(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa+1}=x(1+x)^{\nu}.$$

Από την $f(x)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa+1}$ έχουμε $f'(x)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa}$ (1), ενώ από την $f(x)=x(1+x)^{\nu}$, $f'(x)=(1+x)^{\nu}+\nu x(1+x)^{\nu-1}=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $f'(x)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa}=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$ (3)

β) Από την (3), αν θέσουμε x=1, έχουμε:

$$2^{\nu-1}(\nu+2)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+1)\binom{\nu}{\kappa}=1+2\binom{\nu}{1}+3\binom{\nu}{2}+\ldots+(\nu+1)\binom{\nu}{\nu}$$

95. α) Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f'(0)=1$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x-f(0)\eta\mu x}{x^2}$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο 0 και $f'(0)=g'(0)=0$ να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(0)f(x)-g(x)f(0)}{x}=0$.

Λύση:

α) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x-f(0)\eta\mu x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=f'(0)\cdot 1=1\cdot 1=1$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(0)f(x)-g(x)f(0)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(0)f(x)-g(0)f(0)-g(x)f(0)+g(0)f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}g(0)\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-$$

$$-\lim_{x\to 0}f(0)\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f(0)\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g(0)f'(0)-$$

$-f(0)g'(0)=0.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Τοπικά ακρότατα

α) Τοπικό μέγιστο

Θεωρούμε μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** $f(x_o)$ σ' ένα σημείο $x_o\in A$, όταν υπάρχει μια περιοχή $(x_o-\delta, x_o+\delta)$, $\delta>0$, τέτοια ώστε για κάθε $x\in A$, με:

$$x\in(x_o-\delta, x_o+\delta) \Longrightarrow f(x)\le f(x_o)$$

β) Τοπικό ελάχιστο

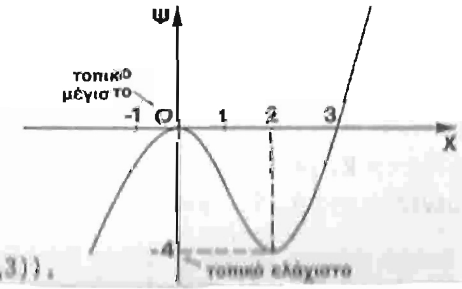
Η f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** $f(x_o)$ σ' ένα σημείο $x_o\in A$, όταν υπάρχει μια περιοχή $(x_o-\delta, x_o+\delta)$, $\delta>0$, τέτοια ώστε για κάθε $x\in A$ με:

$$x\in(x_o-\delta, x_o+\delta) \Longrightarrow f(x)\ge f(x_o)$$

Παράδειγμα: Η f με $f(x)=x^3-3x^2$ παρουσιάζει στο σημείο $x_o = 2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -4$, διότι για κάθε $x\in A=\mathbb{R}$, με $x\in(2-1, 2+1)$ είναι:

$$f(2)\le f(x)$$

(Πράγματι είναι $-4\le x^3-3x^2\ \forall x\in(1,3)$).



Η ίδια συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο $x_0'=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$, διότι $\forall x \in A=\mathbb{R}$, με $x \in (0-1, 0+1)$ είναι $f(x) \leq f(0)$ (πράγματι είναι $x^3-3x^2 \leq 0$ $\forall x \in (-1,1)$).

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό το μέγιστο μιας συνάρτησης (αν φυσικά υπάρχει) είναι και τοπικό μέγιστο. Για να διακρίνουμε επομένως το μέγιστο το ονομάζουμε **ολικό μέγιστο**.

Το ελάχιστο μιας συνάρτησης (αν υπάρχει) είναι και τοπικό ελάχιστο. Για διάκριση ονομάζεται **ολικό ελάχιστο**.

Το τοπικό μέγιστο ή το τοπικό ελάχιστο ονομάζεται **τοπικό ακρότατο**. Το ολικό μέγιστο ή το ολικό ελάχιστο ονομάζεται **ολικό ακρότατο**.

Έτσι λοιπόν τα ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης είναι και τοπικά ακρότατα, ενώ τα τοπικά ακρότατα δεν είναι πάντα ολικά.

Θεώρημα Fermat*

> Αν μια συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό** σημείο x_0 του διαστήματος Δ, τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

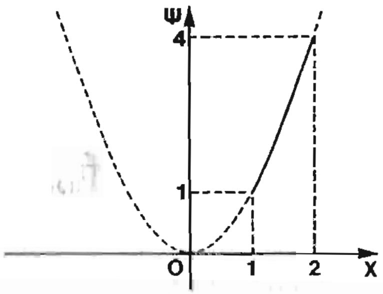
Παράδειγμα: Η συνάρτηση f, με $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{2}$ του $(0,\pi)$ τοπικό μέγιστο το $f(x_0)=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\frac{\pi}{2}$

Άρα είναι $f'(x_0)=0$. Πράγματι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$.

Παρατηρήσεις:

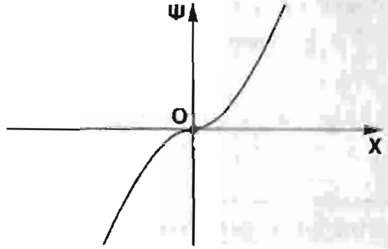
1. Το σημείο x_0 στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο πρέπει να είναι σημείο ανοικτού διαστήματος. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο σε άκρο κλειστού διαστήματος το θεώρημα δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(x)=x^2$ έχει μέγιστο στο $x_0=2$, γιατί για κάθε $x \in [1,2]$ είναι $f(x)=x^2 \leq 2^2=4$. Η παράγωγος όμως της f στο σημείο $x_0=2$ είναι διάφορη του 0. Πράγματι $f'(x)=2x$ και $f'(2)=2 \cdot 2=4$.



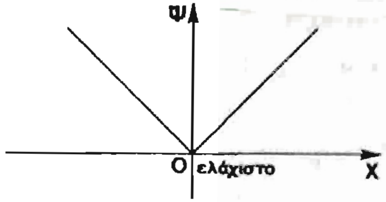
2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν για μια συνάρτηση f στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει η παράγωγος και είναι $f'(x_0)=0$, δεν έπεται ότι στο σημείο αυτό παρουσιάζει ακρότατο.

Παράδειγμα: Η $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(x)=x^3$ είναι $f'(x)=3x^2$. Άρα $f'(0)=3 \cdot 0^2=0$. Στο σημείο όμως $x_0=0$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατο, διότι για κάθε $x<0$, είναι $f(x)=x^3<0$, ενώ για κάθε $x>0$, είναι $f(x)=x^3>0$.



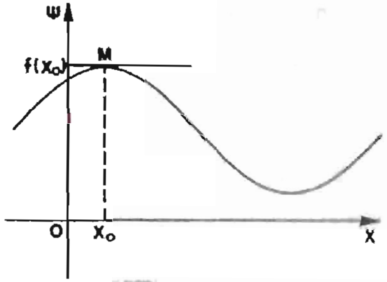
3. Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Παράδειγμα: Η $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(x)=|x|$ παρουσιάζει στο $x_0=0$ ακρότατο (ελάχιστο) το $f(0)=0$, χωρίς η f (όπως είδαμε), να είναι παραγωγίσιμη στο 0.



4. Η γεωμετρική ερμηνεία του προηγουμένου θεωρήματος είναι η εξής:

Αν η f για $x=x_0$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$. Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι 0, άρα η εφαπτομένη στο M είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.



Παρατήρηση:

Αν η f είναι συνεχής στο Δ και x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ, για το οποίο $f'(x_0)=0$ ή δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε το x_0 ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** της f. Ειδικότερα αν $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 ονομάζεται **στάσιμο σημείο**.

Θεώρημα Rolle*

> Θεωρούμε τη συνάρτηση f, που:
> • είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

* Fermat Pierre (Φερμά Πιέρ): Γάλλος Μαθηματικός (1601-1665).

** Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που δεν είναι άκρα του, ονομάζονται εσωτερικά σημεία του Δ.

* Rolle Michel (Ρόλ Μισέλ): Γάλλος Μαθηματικός (1652-1719).

- είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β).
- ισχύει f(α)=f(β).

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο x_o του (α,β), τέτοιο που:

$$f'(x_o)=0$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την f: [-2,2] ⟶ **R**, με $f(x)=x^2$. Η f είναι συνεχής στο [-2,2] παραγωγίσιμη στο [-2,2] (άρα και στο (-2,2)) και:

$$f(-2)=(-2)^2=4=2^2=f(2)$$

Άρα υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $x_o \in (-2,2)$, τέτοιο που $f'(x_o)=0$. Πράγματι είναι $f'(x)=2x$ και $2x=0 \iff x_o=0$. Επομένως το σημείο x_o είναι το 0

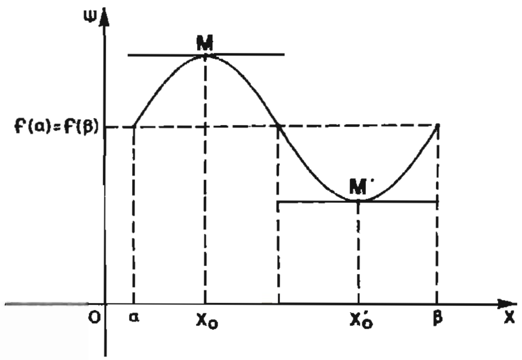
Παρατηρήσεις στο θεώρημα του Rolle:

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β], θα είναι παραγωγίσιμη και στο (α,β).

2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και α, β είναι ρίζες της, τότε μεταξύ των ριζών της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'.

Απόδειξη: Είναι f(α)=f(β)=0 (εφόσον α, β ρίζες της f). Επομένως το θεώρημα του Rolle εφαρμόζεται για την f στο [α,β]. Άρα υπάρχει ένας αριθμός ρ∈(α,β), τέτοιος που f'(ρ)=0.

3. Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα σημείο, τουλάχιστον, x_o, τέτοιο που η εφαπτομένη στο $M(x_o,f(x_o))$ του διαγράμματος της f να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x, εφόσον από το θεώρημα είναι $f'(x_o)=0$ (το $f'(x_o)$ είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο M). Παρατηρούμε ότι υπάρχει και δεύτερο σημείο x'_o με την προηγούμενη ιδιότητα.

4. Το θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει ότι:

α) Η πρώτη παράγωγος έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα (α,β) και

β) Ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_o,f(x_o))$ είναι 0 ($f'(x_o)=0$).

5. Το θεώρημα του Rolle απαιτεί η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Τούτο συμβαίνει διότι είναι δυνατόν να υπάρχει συνάρτηση για την οποία να ισχύει το θεώρημα του Rolle, που να μην παραγωγίζεται, όμως, στα άκρα του διαστήματος.

6. Η συνάρτηση f πρέπει να έχει παράγωγο ∀x∈(α,β). Αν σ' ένα τουλάχιστον σημείο του (α,β), η f δεν παραγωγίζεται, τότε το θεώρημα δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Η φ: [0,π] ⟶ **R**, με $φ(x)=\sqrt{1-ημx}$. Η φ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0,π] και f(0)=f(π)=1, δεν υπάρχει όμως $x_o \in (0,π)$, ώστε $f'(x_o)=0$, διότι η f δεν παραγωγίζεται ∀x∈(0,π). Πράγματι είναι:

$$f'(x)=\frac{-συνx}{2\sqrt{1-ημx}} , \quad \forall x \in \left(0,\frac{π}{2}\right) \cup \left(\frac{π}{2},π\right)$$

δηλαδή η f δεν παραγωγίζεται στο $\frac{π}{2} \in (0,π)$.

7. Η υπόθεση της συνέχειας στο διάστημα [α,β] είναι αναγκαία. Όπως φαίνεται στην f, με:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & αν\ x=0 \\ \frac{1}{x}-1, & αν\ x\in(0,1] \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f(0)=0=\frac{1}{1}-1=f(1)$. Είναι, όμως, $f'(x)=-\frac{1}{x^2} \neq 0$, ∀x∈(0,1) και τούτο διότι η f δεν είναι συνεχής στο [0,1]. Πράγματι είναι f(0)=0 και $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

8. Η υπόθεση f(α)=f(β) είναι αναγκαία, όπως φαίνεται στην f, με τύπο f(x)=x στο [1,2]. Η f είναι συνεχής στο [1,2] παραγωγίσιμη στο (1,2), αλλά f'(x)=1≠0, για κάθε x∈(1,2) και αυτό διότι f(1)=1≠2=f(2).

Θεώρημα* της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού

Αν η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f: [1,3] \longrightarrow \mathbf{R}$, με $f(x)=x^3$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ (άρα και στο $(1,3)$). Επομένως υπάρχει $\xi \in (1,3)$, τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ (1)

Το ξ βρίσκεται ως εξής. Η (1) γράφεται $3\xi^2=\frac{3^3-1}{3-1} \Longleftrightarrow \xi=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$. Άρα

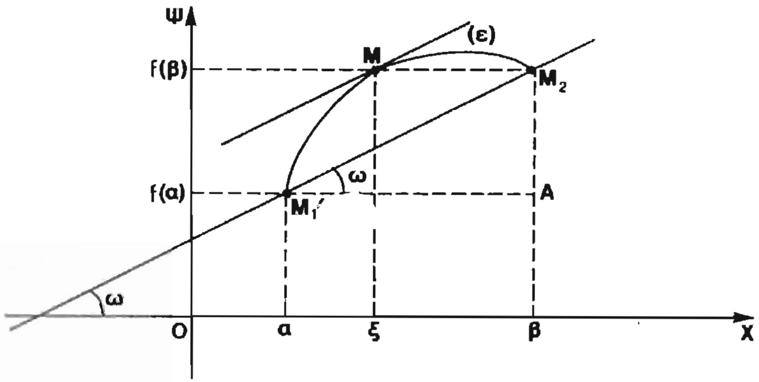
$$\xi=\sqrt{\frac{13}{3}} \in (1,3)$$

(Η τιμή $\xi=-\sqrt{\frac{13}{2}}$ απορρίπτεται διότι $-\sqrt{\frac{13}{2}} \notin (1,3)$).

Παρατηρήσεις στο θεώρημα της μέσης τιμής

1. Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος είναι η εξής.

Θεωρούμε τα σημεία $M_1(\alpha,f(\alpha))$ και $M_2(\beta,f(\beta))$ του διαγράμματος της f. Τότε υπάρχει ξ, με $\alpha<\xi<\beta$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2.



Πράγματι $f'(\xi)$ είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης ευθείας (ε) στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ του διαγράμματος της f. Ενώ ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας M_1M_2 είναι $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (διότι από το ορθογώνιο τρίγωνο M_1M_2A έχουμε $\lambda_{M_1M_2}=\varepsilon\varphi\omega=\frac{AM_2}{M_1A}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$). Επειδή από το θεώρημα είναι $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, θα είναι και $\lambda_\varepsilon=\lambda_{M_1M_2} \Longleftrightarrow (\varepsilon)//M_1M_2$.

* Η "Θεώρημα του Lagrange" ((Lagrange Joseph-Louis): Γάλλος Μαθηματικός (1736-1813)), ή θεώρημα των "πεπερασμένων αυξήσεων".

2. Η υπόθεση η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ είναι αναγκαία. Η υπόθεση η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) είναι αναγκαία.

3. Ο τύπος $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ του θεωρήματος της μέσης τιμής παίρνει τις μορφές:

- $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$
- $f(\beta)=f(\alpha)+f'(\xi)(\beta-\alpha)$ (1)
- $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$, $0<\theta<1$.

Ο τελευταίος τύπος προκύπτει από τον τύπο (1), αν θέσουμε $\beta=x+h$ και $\alpha=x$ (βλέπε άσκηση 31, σελίδα 126).

4. Αν το θεώρημα της Μέσης Τιμής εφαρμόζεται για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε θα εφαρμόζεται για την ίδια συνάρτηση σε κάθε διάστημα $[\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$.

5. Το θεώρημα της μέσης τιμής είναι γενίκευση του θεωρήματος του Rolle. Πράγματι αν ισχύει το Θ.Μ.Τ. και επιπλέον $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε ο τύπος του θεωρήματος δίνει $f'(\xi)=0$.

6. Επέκταση του θεωρήματος της Μέσης τιμής είναι το επόμενο Θεώρημα (**Θεώρημα Cauchy**), που δίνεται ως άσκηση.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι:

- συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$[f(\beta)-f(\alpha)]g'(\xi)=[g(\beta)-g(\alpha)]f'(\xi) \quad (1)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση F με $F(x)=[f(\beta)-f(\alpha)]g(x)-[g(\beta)-g(\alpha)]f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Μάλιστα είναι: $F'(x)=[f(\beta)-f(\alpha)]g'(x)-[g(\beta)-g(\alpha)]f'(x)$ (2)

Ακόμα είναι $F(\alpha)=f(\beta)g(\alpha)-f(\beta)g(\alpha)=F(\beta)$. Άρα κατά το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο που $F'(\xi)=0$. Τότε από την (2) προκύπτει η αποδεικτέα. Η ισότητα (1), στην περίπτωση που είναι $g(\alpha)\neq g(\beta)$ και $g'(\xi)\neq 0$, παίρνει την επόμενη μορφή: $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (3)

Στην ειδική περίπτωση που η g είναι η ταυτοτική συνάρτηση $g(x)=x$, τότε από την (3) προκύπτει το θεώρημα μέσης τιμής.

Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε $f(x)=c$, $\forall x\in\Delta$ (δηλαδή η f είναι σταθερή στο Δ).

Πόρισμα:

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και

- είναι παραγωγίσιμες στο Δ
- είναι $f'=g'$

τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά, δηλαδή είναι $f-g=c$.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $ημ^2x+συν^2x=1$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=ημ^2x+συν^2x$. Έχουμε $f'(x)=2ημx(ημx)'+2συνx(συνx)'=2ημxσυνx-2συνxημx=0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $f(x)=ημ^2x+συν^2x=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (c σταθερά). Είναι όμως και $f(0)=ημ^2 0+συν^2 0=1$. Άρα $ημ^2x+συν^2x=1$.

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες έχουμε $f'(x)=2x$, $g'(x)=2x$. Να δειχθεί ότι $f(x)=g(x)+c$ $(c\in\mathbb{R})$.

Λύση: Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f'(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και $f'=g'$. Άρα, λόγω του προηγούμενου πορίσματος, θα είναι:

$$f-g=c \Leftrightarrow f=g+c \Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $[f'(x)]^2-f'(x)=0$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της.

Λύση:

Η (1) γράφεται:

$$f'(x)[f'(x)-1]=0 \Leftrightarrow f'(x)=0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=c$.

4. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f'=f$ (1) και $f(1)=1$, να δειχθεί ότι $f(x)=e^{x-1}$.

Λύση:

Είναι $f'=f$. Έστω $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}\overset{(1)}{=}\frac{f(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{0}{e^{2x}}=0.$$

Άρα θα είναι $F(x)=c \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}=c$ ή $f(x)=ce^x$ (2).

Η (2) για $x=1$ δίνει $f(1)=c\cdot e$. Επειδή $f(1)=1$, έχουμε $ce=1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{e}$.

Έτσι είναι $f(x)=e^{x-1}$.

Παρατηρήσεις-Μεθοδεύσεις

1. Μια συνάρτηση f είναι δυνατόν να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα σημείο x_0 που είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου της. Δηλαδή οι ρίζες της πρώτης παραγώγου (αν υπάρχουν) **είναι πιθανές θέσεις** ακροτάτων για την f. Στα επόμενα θα δούμε πώς βεβαιωνόμαστε αν μια ρίζα x_0 της f' είναι θέση ακρότατου.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f, με:

$$f(x)=\frac{ημx-συνx}{2e^x} \quad \text{στο } [0,2\pi]$$

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2\pi]$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(ημx-συνx)'2e^x-(2e^x)'(ημx-συνx)}{(2e^x)^2}=\frac{(συνx+ημx)2e^x-2e^x(ημx-συνx)}{4e^{2x}}=$$

$$=\frac{συνx}{e^x}$$

Είναι: $\quad f'(x)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{συνx}{e^x}=0 \Longleftrightarrow συνx=0 \quad (1)$

Επειδή $x \in [0,2\pi]$ η (1) έχει ρίζες $x_0=\frac{\pi}{2}$ ή $x_0'=\frac{3\pi}{2}$ που είναι και πιθανές θέσεις ακροτάτων.

> **2.** Για να κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. Ο αριθμός x_0 του θεωρήματος προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $f'(x_0)=0$.

Παραδείγματα:

1. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση f με $f(x)=x^2-1$, στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρεθεί ο αριθμός x_0 του θεωρήματος.

Λύση: Η f σαν πολυωνυμική συνάρτηση είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο $[-1,1]$. Είναι: $f(-1)=(-1)^2-1=0$ και $f(1)=1^2-1=0$ δηλαδή $f(-1)=f(1)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, σημείο $x_0 \in (-1,1)$, ώστε $f'(x_0)=0$. Είναι $f'(x)=2x$ και $f'(x_0)=2x_0$. 'Ετσι έχουμε:

$$2x_0=0 \iff x_0=0. \quad \bullet$$

2. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα του Rolle για τις συναρτήσεις:

α) f, με $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ στο $[-3,3]$

β) f, με $f(x)=x^2+1$ στο $[-2,3]$

γ) f, με $f(x)=1+(x+2)^{\frac{4}{5}}$ στο $[-3,-1]$

δ) f, με $f(x)=\begin{cases} 2-\frac{1}{x}, & \forall x \in (0,1] \\ 1, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ **στο διάστημα $[0,1]$**

Λύση:

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ (πράγματι είναι:

$$x^2-4 \geq 0 \iff (x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2))$$

Επομένως η f δεν είναι ορισμένη παντού στο $[-3,3]$, άρα το θεώρημα δεν ισχύει.

β) Η f είναι ορισμένη συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, σαν πολυωνυμική, άρα και στο $[-2,3]$. Είναι $f(-2) \neq f(3)$. 'Αρα το θεώρημα δεν ισχύει.

γ) Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[-3,-1]$. Είναι:

$$f(-3)=1+(-3+2)^{\frac{4}{5}}=1+(-1)^{\frac{4}{5}}=1+\sqrt[5]{(-1)^4}=1+1=2$$

$$f(-1)=1+(-1+2)^{\frac{4}{5}}=1+1=2$$

δηλαδή $f(-3)=f(-1)$. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (-3,-1). 'Εχουμε:

$$f'(x)=\left[1+(x+2)^{\frac{4}{5}}\right]'=\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{4}{5}-1}(x+2)'=\frac{4}{5}(x+2)^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}$$

Παρατηρούμε ότι για $x=-2$ η f' δεν ορίζεται δηλαδή ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -2. Επειδή $-2 \in (-3,-1)$ η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο (-3,-1), άρα το θεώρημα δεν ισχύει.

δ) Η f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και $f(0)=1=f(1)$. Θα εξετάσουμε την συνέχεια της f στο διάστημα $[0,1]$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}2-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-\infty$$

'Αρα η f δεν είναι συνεχής στο 0. Επομένως η f δεν είναι παντού συνεχής στο $[0,1]$, έτσι το θεώρημα δεν ισχύει.

> **3.** Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Rolle, μπορούμε:
>
> I. Να δείχνουμε ότι μια εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β). Για το σκοπό αυτό θα προσδιορίζουμε μια συνάρτηση F για την οποία έχουμε $F'(x)=f(x)$ και για την F θα διαπιστώνουμε ότι στο $[\alpha,\beta]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, οπότε θα υπάρχει στο (α,β) μια τουλάχιστον ρίζα για την $F'(x)$, δηλαδή για την $f(x)$.
>
> II. Μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των ριζών μίας εξίσωσης, κάνοντας διαδοχικά εφαρμογή του θεωρήματος σε διάφορα διαστήματα.
>
> III. Να δείχνουμε ότι μια εξίσωση $f(x)=0$ δεν είναι δυνατόν να έχει ένα πλήθος ριζών σ' ένα δοσμένο διάστημα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της "εις άτοπον απαγωγής" σε συνδυασμό με το θεώρημα Rolle.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $8x^3-12x^2-6x+5=0$ έχει ρίζα πραγματική στο διάστημα (0,1).

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=8x^3-12x^2-6x+5$. Η f είναι παράγωγος της F με $F(x)=2x^4-4x^3-3x^2+5x$. Θα εξετάσουμε αν για την F ισχύει το θεώρημα του Rolle. Η F είναι (ορισμένη) συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R** (πολυωνυμική συνάρτηση), άρα και στο $[0,1]$. Είναι ακόμα $F(0)=0=F(1)$. 'Ετσι λοιπόν, για την F ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0,1]$. 'Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο που:

$$F'(x_0)=0 \iff f(x_0)=0 \quad (1)$$

Η (1) σημαίνει ότι το x_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$.

2. Να δειχθεί ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για κ διαφορετικές πραγματικές τιμές του x, τότε η f' θα μηδενίζεται για κ-1 τουλάχιστον τιμές του x.

Απόδειξη: Έστω $f(\rho_1)=f(\rho_2)=...=f(\rho_\kappa)=0$. Επομένως σε κάθε διάστημα $[\rho_i,\rho_{i+1}]$, $i=1,2,3,...,(\kappa-1)$ θα εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle, οπότε σε κάθε διάστημα (ρ_i,ρ_{i+1}) θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_i τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_i)=0$$

Επειδή τα διαστήματα είναι κ-1, θα υπάρχουν κ-1 τουλάχιστον πραγματικοί αριθμοί ξ_i τέτοιοι ώστε $f'(\xi_i)=0$ με $i=1,2,...,(\kappa-1)$. Άρα η f' θα μηδενίζεται για κ-1 τουλάχιστον τιμές του x.

3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x+x^3+x^5=\beta_1^2(\alpha_1-x)+\beta_2^2(\alpha_2-x)+\beta_3^2(\alpha_3-x)$ ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$) έχει μια το πολύ ρίζα πραγματική.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με:

$$f(x)=x+x^3+x^5-\beta_1^2(\alpha_1-x)-\beta_2^2(\alpha_2-x)-\beta_3^2(\alpha_3-x).$$

Είναι $f'(x)=1+3x^2+5x^4+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$. Υποθέτουμε ότι η f έχει δυο ρίζες πραγματικές ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$. Η f σαν πολυωνυμική συνάρτηση είναι ορισμένη συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο $[\rho_1,\rho_2]$. Είναι ακόμα:

$$f(\rho_1)=f(\rho_2)$$

συνεπώς ισχύει το θεώρημα του Rolle. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιο που $f'(x_0)=0$. Είναι όμως:

$$f'(x_0)=1+3x_0^2+5x_0^4+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Στο άτοπο φτάσαμε διότι υποθέσαμε ότι το πολυώνυμο f(x) έχει δυο ρίζες στο **R**. Επομένως το f(x) έχει μια το πολύ ρίζα στο **R**.

> **4.** Αν δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε να ικανοποιείται μια σχέση με $f(\xi)$ και $f'(\xi)$, τότε προσδιορίζουμε κατάλληλη συνάρτηση που προκύπτει από τη δοσμένη σχέση στην οποία κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος. Ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση στην οποία θα κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος είναι να βάλουμε στην αποδεικτέα σχέση όπου ξ το x και της συνάρτησης, που προκύπτει έτσι, να βρούμε την παράγουσα.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση φ, για την οποία ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0,\alpha]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi>0$, ώστε:

$$\varphi'(\xi)-2\xi+\alpha=0 \quad (1)$$

Απόδειξη: Η μορφή της (1) μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την g με:

$$g'(x)=\varphi'(x)-2x+\alpha$$

Άρα είναι $g(x)=\varphi(x)-x^2+\alpha x$. Για τη g στο διάστημα $[0,\alpha]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle, διότι είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (της φ και της h, με $h(x)=-x^2+\alpha x$) παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$, σαν άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων (της φ και h). Είναι ακόμα $g(0)=\varphi(0)$ και $g(\alpha)=\varphi(\alpha)$. Επειδή από την υπόθεση είναι $\varphi(0)=\varphi(\alpha)$ θα είναι και $g(0)=g(\alpha)$. Επομένως για την g ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0,\alpha]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$, ώστε $g'(\xi)=0 \iff \varphi'(\xi)-2\xi+\alpha=0$.

> **5.** Για να κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. Ο αριθμός ξ του θεωρήματος προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης:
>
> $$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Παράδειγμα: Να γίνει εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής για την f, με $f(x)=(x^2-1)(x-3)$, στο $[-1,4]$ και να βρεθεί ο ξ του θεωρήματος.

Λύση: Η f σαν πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R** άρα και στο $[-1,4]$. Έτσι λοιπόν, ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1,4]$. Είναι:

$$f'(x)=(x^2-1)'(x-3)+(x^2-1)(x-3)' \implies f'(x)=2x(x-3)+x^2-1 \implies f'(x)=3x^2-6x-1$$

Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(-1,4)$, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)} \iff 3\xi^2-6\xi-1=\frac{15-0}{5} \iff 3\xi^2-6\xi-1=3 \iff 3\xi^2-6\xi-4=0 \quad (1)$$

Η (1) έχει ρίζες $\xi_1\simeq2,5$, $\xi_2\simeq-0,5$. Επειδή $\xi_1,\xi_2\in(-1,4)$ είναι δεκτά και τα δυο ξ.

> **6.** Με τη βοήθεια του θεωρήματος της μέσης τιμής μπορούμε να δείχνουμε
>
> - Ισότητες
> - Ανισότητες της μορφής $f(x)\gtrless g(x)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.
> - Ανισότητες της μορφής $\gamma\lessgtr\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\lessgtr\delta$.
>
> α. Για την απόδειξη ισότητας προσδιορίζουμε κατάλληλη συνάρτηση και κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος σε κατάλληλα διαστήματα.
>
> β. Για να δείξουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x)\gtrless g(x)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)-g(x)$ και κάνουμε εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα.

γ. Για να δείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\gamma \lessgtr \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \lessgtr \delta$, θεωρούμε τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος.

Παραδείγματα:

1. Δίνεται η συνάρτηση φ που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δυο σημεία x_1, x_2, με $x_1,x_2 \in(\alpha,\beta)$, τέτοια ώστε $\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)=0$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$. Στα διαστήματα αυτά για την φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, επομένως υπάρχει ένα $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, τέτοιο που $\dfrac{\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\varphi(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\varphi'(x_1) \iff$

$$\iff \varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\varphi(\alpha)=\left(\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}\right)\varphi'(x_1) \iff \varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\varphi(\alpha)=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\varphi'(x_1) \quad (1)$$

Ακόμα έχουμε ότι υπάρχει $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο που $\dfrac{\varphi(\beta)-\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\varphi'(x_2) \iff$

$$\iff \varphi(\beta)-\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\frac{2\beta-\alpha-\beta}{2}\right)\varphi'(x_2) \iff \varphi(\beta)-\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\varphi'(x_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση έχουμε:

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)[\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)] \quad (3)$$

Από την υπόθεση είναι $\varphi(\beta)=\varphi(\alpha)$. Επομένως η (3) δίνει:

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)[\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)]=0$$

επειδή $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$, έχουμε $\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)=0$.

2. Να δειχθεί ότι $e^x > \frac{1}{2x+1}$ (1), $\forall x \in (0,1)$.

Απόδειξη: Η (1) γράφεται ισοδύναμα $e^x(2x+1)>1 \iff e^x(2x+1)-1>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x(2x+1)-1$. Για την f στο $[0,x]$ $(x\in(0,1))$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (2)$$

Είναι:

$$f'(x)=2e^x+e^x(2x+1)=2xe^x+3e^x$$

Άρα:

$$f'(\xi)=2\xi e^\xi+3e^\xi$$

Η (2) δίνει $2\xi e^\xi+3e^\xi=\frac{e^x(2x+1)-1}{x} \iff x(2\xi e^\xi+3e^\xi)=e^x(2x+1)-1 \quad (3)$

Είναι $0<\xi<x$, άρα $x(2\xi e^\xi+3e^\xi)>0$. Έτσι η (3) δίνει:

$$e^x(2x+1)-1>0 \iff e^x > \frac{1}{2x+1}$$

3. Να δειχθεί ότι $\nu\beta^{\nu-1} < \frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta} < \nu\alpha^{\nu-1}$, όπου $0<\beta<\alpha$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την f με $f(x)=x^\nu$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\beta,\alpha]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(\beta,\alpha)$ ώστε:

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\xi) \quad (1)$$

Είναι $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, επομένως $f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$ και $f(\alpha)=\alpha^\nu$, $f(\beta)=\beta^\nu$. Η (1) γράφεται:

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\nu\xi^{\nu-1} \iff \frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta}=\nu\xi^{\nu-1} \quad (2)$$

Είναι $\xi\in(\beta,\alpha) \iff \beta<\xi<\alpha \implies \beta^{\nu-1}<\xi^{\nu-1}<\alpha^{\nu-1} \implies \nu\beta^{\nu-1}<\nu\xi^{\nu-1}<\nu\alpha^{\nu-1} \quad (3)$

Από (2) και (3) προκύπτει: $\nu\beta^{\nu-1} < \frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta} < \nu\alpha^{\nu-1}$

7. Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος της μέσης τιμής (η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2, $M_1(\alpha,f(\alpha))$, $M_2(\beta,f(\beta))$ μας επιτρέπει να λύνουμε διάφορα γεωμετρικά προβλήματα.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση f: $[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(x)=x^3-1$. Να βρεθεί $\xi\in(0,2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$ και να διαπιστωθεί ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο με τετμημένη ξ είναι παράλληλη προς τη χορδή που ορίζεται από τα σημεία $M_1(0,-1)$, $M_2(2,7)$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, με $f'(x)=3x^2$. Σύμφωνα επομένως με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $\xi\in(0,2)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \iff 3\xi^2=\frac{7+1}{2} \iff 3\xi^2=4 \iff \xi^2=\frac{4}{3} \iff \xi=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Η τιμή $\xi=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ απορρίπτεται διότι $-\sqrt{\frac{4}{3}} \notin (0,2)$. Σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. η εφαπτομένη στο σημείο $M\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\right)$ είναι παράλληλη προς τη χορδή που ορίζεται από τα σημεία $M_1(0,-1)$, $M_2(2,7)$

8. I. Αν είναι $f'(x)=0$, $\forall x \in A$, τότε θα είναι $f(x)=c$, $\forall x \in A$.

II. Αν είναι $f'(x)=g'(x)$, $\forall x \in A$, τότε θα είναι $f(x)=g(x)+c$ (c σταθερά).

Παράδειγμα: Δίνονται οι συναρτήσεις g και h με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+^*$ και $g(x)=\ln f(x)$, $h(x)=3x$, με $g'(x)=h'(x)$. Να δειχθεί ότι $f(x)=\alpha e^{3x}$.

Απόδειξη: Επειδή $g'(x)=h'(x)$ θα είναι $g(x)-h(x)=c$ (σταθερά) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \ln f(x)-3x=c \Longleftrightarrow \ln f(x)-c=3x \Longleftrightarrow \ln f(x)-\ln\alpha=3x$ (θέσαμε $c=\ln\alpha$) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \ln\frac{f(x)}{\alpha}=3x \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{\alpha}=e^{3x} \Longleftrightarrow f(x)=\alpha e^{3x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu x$. Να γίνει εφαρμογή του θεωρήματος του Fermat.

Λύση: Η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)\right)$ και στο σημείο αυτό παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, διότι είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\geq f(x),\ \text{για κάθε}\ x\in[0,\pi]$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Fermat. Συνεπώς θα πρέπει:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Πράγματι $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=|x-2|$.

α) Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο (-3,3).

β) Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, στο σημείο x_0, στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο.

Λύση: α) Είναι $f(2)=0\leq f(x), \forall x\in(-3,3)$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$ το $f(2)=0$ (που είναι και ολικό).

β) Για να ισχύει το θεώρημα του Fermat πρέπει η f να παραγωγίζεται στο (-3,3). Είναι:

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, & \forall x\in(-3,2] \\ x-2, & \forall x\in[2,3) \end{cases}$$

και

$$f'_{\alpha}(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-x+2}{x-2}=-\lim_{x\to2^-}\frac{x-2}{x-2}=-\lim_{x\to2^-}1=-1$$

$$f'_{\delta}(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to2^+}1=1$$

Επειδή $f'_{\alpha}(2)\neq f'_{\delta}(2)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2\in(-3,3)$, το θεώρημα δεν εφαρμόζεται για το x_0.

3. Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f, με $f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$ στο διάστημα (-3,3).

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-3,3) σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)'e^x-(x^2-1)(e^x)'}{e^{2x}}=\frac{2xe^x-e^x(x^2-1)}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2+1}{e^x}=\frac{-x^2+2x+1}{e^x}$$

Θεωρούμε την $f'(x)=0 \iff \frac{-x^2+2x+1}{e^x}=0 \iff -x^2+2x+1=0 \iff x^2-2x-1=0$ $\iff (x_1=1-\sqrt{2}\ ,\ x_2=1+\sqrt{2}\ )$. Επειδή $x_1\in(-3,3)$, $x_2\in(-3,3)$, τα σημεία x_1, x_2 είναι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

4. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β και γ, ώστε για τη συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & \forall x\in[-2,0) \\ \gamma x^2+3x+3, & \forall x\in[0,2] \end{cases}$ **να ισχύει το θεώρημα του Rolle.**

Λύση: Η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-2,2]$ $([-2,0)\cup[0,2]=[-2,2])$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $[-2,2]$. Από τη μορφή του τύπου της φαίνεται ότι η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2,0)$ και $(0,2]$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο 0. Είναι: $f(0)=3$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^2+\alpha x+\beta)=\beta,\qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\gamma x^2+3x+3)=3$$

Άρα πρέπει β=3. Πρέπει ακόμα η f να είναι παραγωγίσιμη στο (-2,2). Από τη μορφή του τύπου της f φαίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (-2,0), (0,2).

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-3}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-\beta}{x}=\lim_{x\to0^-}(x+\alpha)=\alpha$$

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma x^2+3x+3-3}{x}=\lim_{x\to0^+}(\gamma x+3)=3$$

Για να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0, πρέπει να είναι:

$$f'_\alpha(0)=f'_\delta(0) \iff \alpha=3$$

Είναι απαραίτητο ακόμα να είναι:

$$f(-2)=f(2) \iff (-2)^2+\alpha(-2)+\beta=\gamma 2^2+3\cdot2+3 \implies 4-6+3=4\gamma+9 \implies 4\gamma=-8 \implies \gamma=-2$$

Επομένως α=3, β=3 και γ=-2.

5. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\ln(1+|x|)$. Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται για την f στο διάστημα $[-1,1]$ το θεώρημα του Rolle.

(θέμα εξετάσεων)

Λύση: Η f είναι ορισμένη στο **R**, άρα και στο $[-1,1]$ (είναι $1+|x|>0\ \forall x\in R$). Η f είναι συνεχής στο **R** (σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων h_1, h_2 με

$$h_1(x)=1+|x|,\quad h_2(x)=\ln x)$$

άρα και στο $[-1,1]$. Είναι ακόμα $f(-1)=\ln(1+|-1|)=\ln(1+|1|)=f(1)$. Μένει να εξετάσουμε αν η f παραγωγίζεται στο (-1,1). Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & \forall x\in(-1,0] \\ \ln(1+x), & \forall x\in[0,1)\end{cases}$$

Από τη μορφή της f φαίνεται ότι παραγωγίζεται στα διαστήματα (-1,0) και (0,1). Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}=-\lim_{\psi\to1^-}\frac{\ln\psi}{\psi-1}=-1$$

(Θέσαμε $1-x=\psi$, όταν $x\longrightarrow0^-\implies\psi\longrightarrow1^-$) και

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{\omega\to1^+}\frac{\ln\omega}{\omega-1}=1$$

(Θέσαμε $1+x=\omega$. Όταν $x\longrightarrow0^+\implies\omega\longrightarrow1^+$).

Επειδή $f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επειδή η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο (-1,1) το θεώρημα του Rolle δεν ισχύει.

6. Με τη βοήθεια της συνάρτησης f, με $f(x)=3x^3$ στο διάστημα $[-1,1]$ να δειχθεί ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle δεν είναι αναγκαίες ώστε η $f'(x)$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1).

Απόδειξη: Είναι $f'(x)=9x^2$ διπλή ρίζα της f' είναι το 0. Ώστε υπάρχει $x_0\in(-1,1)$, τέτοιο που $f'(x_0)=0$. Παρατηρούμε όμως ότι $f(-1)=-3\neq3=f(1)$. Επομένως οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle είναι ικανές και όχι αναγκαίες.

7. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα του Rolle για τις f, με:

α) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } x\in(0,1] \\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$ **στο διάστημα** $[0,1]$

β) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ **στο διάστημα** $[0,4]$

γ) $f(x)=|x|-1$ **στο διάστημα** $[-1,1]$

Λύση:

α) Η f ορίζεται στο $[0,1]$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο 0. Είναι $f(0)=1$ και $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Άρα η f δεν είναι συνεχής παντού στο $[0,1]$ (εφόσον δεν είναι συνεχής στο 0). Άρα το θεώρημα του Rolle δεν ισχύει.

β) Η f είναι ορισμένη στο $[0,4]$, συνεχής στο $[0,4]$ και $f(0)=\sqrt[3]{4}=f(4)$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$. Είναι:

$$f'(x)=\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\;\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Παρατηρούμε ότι η f′ δεν ορίζεται στο σημείο $x_o=2$. Επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Επειδή $2\in(0,4)$, η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ και το θεώρημα δεν ισχύει.

γ) Η f είναι ορισμένη στο $[-1,1]$. Είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \forall x\in[-1,0]\\ x-1, & \forall x\in[0,1]\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$. Θα εξετάσουμε την συνέχεια της f στο 0. Είναι $f(0)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

Θα εξετάσουμε αν η f παραγωγίζεται στο $(-1,1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)\cup(0,1)$. Εξετάζουμε την παράγωγο στο 0. Είναι:

$$f'_{\alpha}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-1+1}{x}=-\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=-\lim_{x\to0^-}1=-1$$

και

$$f'_{\delta}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1+1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

Επειδή $f'_{\alpha}(0)\neq f'_{\delta}(0)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επειδή $0\in(-1,1)$ η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, άρα το θεώρημα δεν ισχύει.

8. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα του Rolle για τις συναρτήσεις f με:

α) $f(x)=x|\eta\mu x|$, στο διάστημα $[-\pi,\pi]$

β) $f(x)=\ln\eta\mu x$, στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

γ) $f(x)=\left[x^4(x-1)\right]^{\frac{1}{3}}$, στο διάστημα $[0,1]$

Στις περιπτώσεις που το θεώρημα ισχύει να βρεθεί ο αριθμός x_o του διαστήματος.

Λύση:

α) Είναι $f(x)=\begin{cases}-x\eta\mu x, & \forall x\in[-\pi,0]\\ x\eta\mu x, & \forall x\in[0,\pi]\end{cases}$

Η f είναι ορισμένη στο $[-\pi,\pi]$. Η f είναι συνεχής στο $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο 0. Είναι $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x\eta\mu x)=0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\eta\mu x)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Έτσι η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$. Είναι $f'(x)=-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$, για $x\in(-\pi,0)$ και $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, για $x\in(0,\pi)$. Η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0, διότι:

$$f'_{\alpha}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\eta\mu x}{x}=-\lim_{x\to0^-}\eta\mu x=0$$

και

$$f'_{\delta}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0^+}\eta\mu x=0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$. Είναι ακόμα $f(-\pi)=0=f(\pi)$. Άρα για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle. Υπάρχει λοιπόν $x_o\in(-\pi,\pi)$, ώστε $f'(x_o)=0$. Είναι:

$$f'(x_o)=0 \iff f'(x_o)=\begin{cases}-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x=0 \quad (1), & \text{για } x\in(-\pi,0]\\ \text{και} & \\ \eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x=0 \quad (2), & \text{για } x\in[0,\pi)\end{cases}$$

Οι (1) και (2) έχουν ρίζα το 0. Άρα $x_o=0$.

β) Είναι $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\eta\mu\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, άρα:

$$\ln\eta\mu\frac{\pi}{6}=\ln\eta\mu\frac{5\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}=-\ln2 \iff f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. Είναι $f'(x)=\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\sigma\varphi x$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$, οπότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Rolle, για την f στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. Έτσι υπάρχει $x_o\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$, ώστε $f'(x_o)=0 \iff \sigma\varphi x_o=0$ (στο $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$).

Είναι $\sigma\varphi x_o=0 \iff x_o=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ (1), $\kappa\in Z$. Πρέπει $\frac{\pi}{6}<\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{6} \iff$

$$\iff 1<6\kappa+3<5 \iff -\frac{1}{3}<\kappa<\frac{1}{3}$$

Επειδή $\kappa\in Z$ είναι $\kappa=0$. Η (1) δίνει $x_o=\frac{\pi}{2}$

γ) Είναι $f(0)=f(1)=0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και έχει παράγωγο για κάθε $x\in(0,1)$ την f′, με $f'(x)=\frac{1}{3}\;\frac{5x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$. Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0,1]$, δηλαδή υπάρχει $x_o\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$. Έχουμε:

$f'(x_o)=0 \iff 5x_o^2-4x_o=0 \iff x_o(5x_o-4)=0 \iff 5x_o-4=0 \iff$

$\iff x_o=\frac{4}{5} \in (0,1) \quad (x_o \neq 0, \quad$ αφού $x_o \in (0,1))$

****9. Δίνεται η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}$ $(\mu,\nu \in N^*)$.**

α) Να δειχθεί ότι το θεώρημα του Rolle ισχύει στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

β) Να δειχθεί ότι για τον αριθμό x_o του θεωρήματος ισχύει:

$$\frac{x_o-\alpha}{\beta-x_o}=\frac{\mu}{\nu}$$

Απόδειξη:

α) Η φ είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$, το θεώρημα του Rolle εφαρμόζεται. Επομένως υπάρχει αριθμός $x_o \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $\varphi'(x_o)=0$.

β) Έχουμε:

$$\varphi'(x)=\mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu}+\nu(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu-1}=(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}[\mu(x-\beta)+\nu(x-\alpha)]$$

Επομένως: $\varphi'(x_o)=(x_o-\alpha)^{\mu-1}(x_o-\beta)^{\nu-1}[\mu(x_o-\beta)+\nu(x_o-\alpha)]=0 \quad (1)$

Επειδή $x_o-\alpha \neq 0$ και $x_o-\beta \neq 0$ η (1) δίνει:

$$\mu(x_o-\beta)+\nu(x_o-\alpha)=0 \iff \frac{x_o-\alpha}{\beta-x_o}=\frac{\mu}{\nu}$$

10. Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις:

α) $8x^3-9x^2-8x+5=0$

β) $\eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x=0$

έχουν μια ρίζα πραγματική στο διάστημα (0,1).

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=8x^3-9x^2-8x+5$, που είναι παράγωγος της συνάρτησης F, με $F(x)=2x^4-3x^3-4x^2+5x$.

Για την πολυωνυμική συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$, διότι είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $F(0)=0=F(1)$. Επομένως υπάρχει $x_o \in (0,1)$, τέτοιο ώστε:

$$F'(x_o)=0 \iff f(x_o)=0$$

δηλαδή το σημείο $x_o \in (0,1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x$ που είναι παράγωγος της F, με $F(x)=(x-1)\eta\mu x$.

Η F είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο $[0,1]$. Είναι ακόμα $F(1)=F(0)$. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_o \in (0,1)$, τέτοιος ώστε $F'(x_o)=0 \iff f(x_o)=0$, δηλαδή το σημείο

$x_o \in (0,1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

11. Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις:

α) $e^x-x-1=0$

β) $e^x-xe^x-1=0$ έχουν μόνο μια ρίζα πραγματική.

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x-x-1$. Είναι $f(0)=e^0-0-1=1-1=0$. Άρα μια προφανής ρίζα της f είναι το 0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κι άλλη ρίζα ρ, με ρ>0, τότε για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,\rho]$. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0,\rho)$ τέτοιο που $f'(\xi)=0 \quad (1)$. Είναι: $f'(x)=e^x-1$, άρα $f'(\xi)=e^{\xi}-1$. Η (1) δίνει

$$e^{\xi}-1=0 \iff e^{\xi}=1 \iff e^{\xi}=e^0 \iff \xi=0$$

που είναι άτοπο εφόσον $0<\xi<\rho$.

Στο άτοπο φτάσαμε, διότι υποθέσαμε ότι η f έχει και δεύτερη ρίζα στο R_+^*. Επομένως η $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική. Ανάλογα εργαζόμαστε αν $\rho<0$.

β) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

****12. α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{2\nu}+\alpha x+\beta=0$ (1) $(\nu \in N^*,\ \alpha,\beta \in R)$ έχει δυο το πολύ διαφορετικές ρίζες στο R.**

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta=0$ (2) $(\nu \in N^*,\ \alpha,\beta \in R)$, έχει τρεις το πολύ διαφορετικές ρίζες στο R.

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=x^{2\nu}+\alpha x+\beta$. Είναι $f'(x)=2\nu x^{2\nu-1}+\alpha$. Η εξίσωση $2\nu x^{2\nu-1}+\alpha=0$ είναι διώνυμη περιττού βαθμού, άρα έχει μια μόνο ρίζα πραγματική στο **R**. Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Η f είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ και ακόμα $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)$. Άρα το θεώρημα του Rolle ισχύει για την f στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Έτσι λοιπόν η $f'(x)=0$ θα έχει δυο τουλάχιστον ρίζες πραγματικές, πράγμα άτοπο. Άρα η $f(x)=0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δυο ρίζες στο **R**.

β) Θεωρούμε την f, με $f(x)=x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta$, τότε είναι $f'(x)=(2\nu+1)x^{2\nu}+\alpha$. Η $(2\nu+1)x^{2\nu}+\alpha=0$ είναι διώνυμη άρτιου βαθμού, άρα έχει δυο το πολύ ρίζες

πραγματικές. Έστω ότι η f έχει τέσσερεις διαφορετικές ρίζες στο **R**. Τότε η f' θα έχει (θεώρημα Rolle) τρεις τουλάχιστον ρίζες διακεκριμένες στο R, πράγμα άτοπο.

13. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+a=0$ $(a\in R)$ έχει μια το πολύ ρίζα στο διάστημα (-1,1).

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=x^3-3x+a$, $x\in \mathbf{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**. Υποθέτουμε ότι η f(x) έχει δυο ρίζες ρ_1,ρ_2 διαφορετικές στο διάστημα (-1,1). Τότε η $f'(x)=3x^2-3$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα (ρ_1,ρ_2). Έχουμε τη διάταξη $-1<\rho_1<\xi<\rho_2<1$ (1)
Οι ρίζες της $f'(x)=0 \iff 3x^2-3=0$ είναι: $(\xi_1=-1,\xi_2=1)$. Αλλά αυτό δεν συμφωνεί με την (1).

Άρα η f(x) έχει μια το πολύ ρίζα ρ στο διάστημα (-1,1) (η ρίζα ρ του f(x) είναι απλή, διότι οι μόνες πιθανές πολλαπλές ρίζες του f(x) είναι οι ρίζες του f'(x), δηλαδή ±1, ενώ $\rho\neq\pm1$).

**** 14. α) Αν το πολυώνυμο $f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x$ έχει ρίζα θετική ρ τότε το πολυώνυμο f'(x) έχει ρίζα θετική μικρότερη από την ρ.**

β) Αν το πολυώνυμο $f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$ $(a_\nu\neq0)$ έχει ν ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο R, τότε το πολυώνυμο f'(x) θα έχει ν-1 ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο R.

(Armando Rosa "Algebra")

Απόδειξη:

α) Το πολυώνυμο f(x) είναι συνάρτηση ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο [0,ρ]. Είναι f(0)=f(ρ). Επειδή ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, θα υπάρχει ένα $x_o\in(0,\rho)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o)=0$$

Έτσι όμως το πολυώνυμο f'(x) θα έχει ρίζα θετική μικρότερη του ρ (είναι $0<x_o<\rho$).

β) Οι ν ρίζες του f(x) ορίζουν ν-1 διαστήματα. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για το πολυώνυμο f(x). Έτσι λοιπόν, το πολυώνυμο f'(x) έχει από μια τουλάχιστον, ρίζα σε καθένα από τα ν-1 διαστήματα. Άρα το πολυώνυμο f'(x) έχει ν-1, τουλάχιστον, ρίζες. Επειδή βαθμf'(x)=ν-1 το f'(x) έχει ν-1 το πολύ ρίζες πραγματικές. Άρα το f'(x) έχει ν-1 ακριβώς ρίζες στο **R**.

**** 15. Να δειχθεί με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Bolzano και Rolle ότι το πολυώνυμο $f(x)=2x^3-3x-1$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$.**

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]$ και:

$$f\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)f\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=(\sqrt2-1)(-\sqrt2-1)=-(\sqrt2-1)(\sqrt2+1)=-[(\sqrt2)^2-1]=-1<0$$

Σύμφωνα με τη θεώρημα του Bolzano η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$.

Θα δείξουμε ότι η f δεν έχει άλλη ρίζα στο διάστημα αυτό. Υποθέτουμε ότι η f έχει δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1,\rho_2\in\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ και $\rho_1\neq\rho_2$. Το Θεώρημα του Rolle για την f ισχύει στο διάστημα (ρ_1,ρ_2). Άρα υπάρχει $x_o\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιος ώστε $f'(x_o)=0$. Είναι:

$$f'(x_o)=6x_o^2-3=0 \iff x_o=\pm\frac{\sqrt2}{2}$$

που είναι αδύνατο εφόσον $-\frac{\sqrt2}{2}<\rho_1<x_o<\rho_2<\frac{\sqrt2}{2}$. Έτσι λοιπόν η f αποκλείεται να έχει δυο ρίζες διαφορετικές στο διάστημα $\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$. Άρα η f έχει μια μόνο ρίζα ρ στο $\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι απλή. Αν η ρ ήταν πολλαπλή ρίζα για την f, τότε η ρ θα ήταν και ρίζα για την f'. Η f' όμως έχει ρίζες $-\frac{\sqrt2}{2}$, $\frac{\sqrt2}{2}$ και είναι $-\frac{\sqrt2}{2}<\rho<\frac{\sqrt2}{2}$.

**** 16. Αν $\frac{a_o}{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}+\frac{a_2}{\nu-1}+\ldots+\frac{a_{\nu-1}}{2}+\frac{a_\nu}{1}=0$, να δειχθεί ότι η εξίσωση: $a_ox^\nu+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_{\nu-1}x+a_\nu=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,1).**

Απόδειξη: Θεωρούμε την f, με $f(x)=a_ox^\nu+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_{\nu-1}x+a_\nu$, τότε η συνάρτηση που έχει για παράγωγο την f(x) θα είναι η F, με:

$$F(x)=\frac{a_o}{\nu+1}x^{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}x^\nu+\ldots+\frac{a_{\nu-1}}{2}x^2+a_\nu x$$

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0,1] σαν πολυωνυμική. Είναι F(0)=0

$$F(1)=\frac{a_o}{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu}+\ldots+\frac{a_{\nu-1}}{2}+a_\nu=0$$

δηλαδή F(0)=F(1). Άρα για την F στο διάστημα [0,1] ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi)=0$. Έτσι έχουμε ότι η $F'(x)=0$, δηλαδή η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

17. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5+4x^3+5x+27=0$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική.

Απόδειξη: Επειδή το πολυώνυμο $f(x)=x^5+4x^3+5x+27$ είναι περιττού βαθμού, θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα ρ_1. Επίσης έχουμε $f'(x)=5x^4+12x^2+5$ οπότε $\forall x\in \mathbf{R}$, $f'(x)>0$ (1). Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κι άλλη πραγματική ρίζα ρ_2 της $f(x)=0$ και είναι $\rho_1<\rho_2$. Τότε για τη συνάρτηση f έχουμε ότι:

* είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
* είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
* $f(\rho_1)=0=f(\rho_2)$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $\rho_3\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\rho_3)=0$. Αυτό όμως, λόγω της (1), είναι άτοπο.

Άρα η f έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

18. Να δειχθεί ότι η f, με $f(x)=x^2-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες στο $(-\pi,\pi)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το διάστημα $[-\pi,0]$. Είναι:

$$f(-\pi)=(-\pi)^2+\pi\eta\mu(-\pi)-\sigma\upsilon\nu(-\pi)=\pi^2+1$$

και:

$$f(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1$$

οπότε:

$$f(-\pi)f(0)=-(\pi^2+1)<0$$

και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi,0)$. Θεωρούμε το διάστημα $[0,\pi]$. Είναι $f(0)=-1$ και $f(\pi)=\pi^2+1$, δηλαδή $f(0)f(\pi)=-(\pi^2+1)<0$ και επομένως η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$. Άρα η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$. Θα δείξουμε ότι η f έχει το πολύ δυο ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$. Αν η f είχε τρεις ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, τις ρ_1,ρ_2,ρ_3, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, τότε η f΄ θα είχε από μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$ και στο $[\rho_2,\rho_3]$ (διότι ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$). Είναι όμως:

$$f'(x)=(2-\sigma\upsilon\nu x)x=0 \iff x=0$$

(είναι $2-\sigma\upsilon\nu x\neq 0$). Επειδή η f΄ έχει μια μόνο ρίζα, η f έχει δυο το πολύ ρίζες. Δείξαμε λοιπόν, ότι η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\pi,\pi)$ και δυο το πολύ ρίζες στο ίδιο διάστημα. Άρα η f έχει δυο ακριβώς ρίζες στο $(-\pi,\pi)$.

19. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες διαφορετικές στο διάστημα $(-1,1)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(x^2-1)\eta\mu x$. Είναι:

$$f'(x)=(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x$$

Η f είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο $[-1,1]$ και ακόμα $f(-1)=f(1)=f(0)=0$. Άρα το θεώρημα του Rolle εφαρμόζεται στα διαστήματα $[-1,0]$, $[0,1]$. Επομένως θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ της $f'(x)=0$. Δηλαδή η εξίσωση $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x=0$ έχει δυο τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

20. Αν για το πολυώνυμο f(x) ισχύει $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, τότε το f(x) έχει μια το πολύ ρίζα στο R.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το f(x) έχει δυο ρίζες τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Για τη συνάρτηση f και στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle (αφού η f παραγωγίζεται στο R θα είναι συνεχής στο R). Έτσι λοιπόν, η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\rho_1,\rho_2]$. Είναι ακόμα $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$). Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιο που $f'(\xi)=0$, πράγμα αδύνατο, διότι $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Άρα το πολυώνυμο f(x) δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες στο **R**.

21. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-e^{\alpha}+e^{\beta}=0$ (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-e^{\alpha}+e^{\beta}$, που είναι παράγωγος της συνάρτησης F, με $F(x)=e^{\alpha x}-e^{\beta x}-(e^{\alpha}-e^{\beta})x$.

Η F είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $F(0)=0=F(1)$. Επομένως για την F ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα υπάρχει αριθμός $x_o\in(0,1)$, τέτοιος ώστε:

$$F'(x_o)=0 \iff f(x_o)=0 \iff \alpha e^{\alpha x_o}-\beta e^{\beta x_o}-e^{\alpha}+e^{\beta}=0$$

δηλαδή η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

***** 22. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g που είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β). Δίνεται ακόμα ότι $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $g(\alpha)g(\beta)\neq 0$, $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που $g(\xi)=0$.** (U. of O.)

Απόδειξη: Έστω ότι $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, για την οποία είναι:

$$\varphi(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=0,\quad \varphi(\beta)=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}=0$$

Η φ σαν πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο x_o του (α,β) τέτοιο που $\varphi'(x_o)=0$ (1). Επειδή $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, θα είναι:

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\neq 0$$

Επομένως για κάθε $x\in(\alpha,\beta) \Longrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\neq 0$, δηλαδή για κάθε $x\in(\alpha,\beta) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \varphi'(x)\neq 0$ (2). Η (2) έρχεται σε αντίθεση με την (1). Άρα δεν μπορεί να είναι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που:

$$g(\xi)=0$$

**** 23. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow R$, που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $F(x)=e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f'(x_o)=\dfrac{\alpha+\beta-2x_o}{(x_o-\alpha)(x_o-\beta)}$.**

(Πανεπιστήμιο Λονδίνου)

Απόδειξη: Η h με $h(x)=e^{f(x)}$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων Οι g_1, με $g_1(x)=x-\alpha$ και g_2, με $g_2(x)=x-\beta$ είναι συνεχείς, οπότε και η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Είναι $F(\alpha)=F(\beta)=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) θα είναι και η F παραγωγίσιμη στο (α,β). Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την F στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Επομένως θα υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $F'(x_o)=0$. Είναι όμως, $F'(x)=e^{f(x)}f'(x)(x-\alpha)(x-\beta)+e^{f(x)}(2x-\alpha-\beta)$ (1). Άρα:

$$F'(x_o)=0 \Longleftrightarrow e^{f(x_o)}f'(x_o)(x_o-\alpha)(x_o-\beta)+e^{f(x_o)}(2x_o-\alpha-\beta)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f'(x_o)=-\frac{2x_o-\alpha-\beta}{(x_o-\alpha)(x_o-\beta)}$$

**** 24. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, φ και g ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Να δειχθεί ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε:**

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f'(\xi)\\ \varphi(\alpha) & \varphi(\beta) & \varphi'(\xi)\\ g(\alpha) & g(\beta) & g'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση F, με:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(x)\\ \varphi(\alpha) & \varphi(\beta) & \varphi(x)\\ g(\alpha) & g(\beta) & g(x)\end{vmatrix},\ \text{με } x\in[\alpha,\beta]$$

Είναι $F(\alpha)=F(\beta)=0$. Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), διότι το $F(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$.

Άρα για την F ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f'(\xi)\\ \varphi(\alpha) & \varphi(\beta) & \varphi'(\xi)\\ g(\alpha) & g(\beta) & g'(\xi)\end{vmatrix}=0$$

***** 25. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$.** Είναι:

$$g(x)=h(x)f'(x)-h'(x)f(x)\quad (1)$$

Αν $g(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, να δειχθεί ότι μεταξύ δυο πραγματικών ριζών ρ_1,ρ_2 του $f(x)$ περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα του $h(x)$. (Θέμα Ε.Μ.Ε.)

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ρ_1, ρ_2 είναι δυο ρίζες του $f(x)$ και ότι το $h(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2). Είναι:

$$g(\rho_1)=h(\rho_1)f'(\rho_1)\neq 0 \Longrightarrow h(\rho_1)\neq 0$$

Όμοια δείχνουμε ότι $h(\rho_2)\neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση F, με $F(x)=\dfrac{f(x)}{h(x)}$, ορισμένη στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$. Η F είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2). Ακόμα ισχύει $F(\rho_1)=F(\rho_2)=0$. Έτσι λοιπόν, για τη συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$. Άρα θα υπάρχει αριθμός x_o, $x_o\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιος ώστε $F'(x_o)=0$ (2). Είναι όμως:

$$F'(x_o)=\frac{f'(x_o)h(x_o)-f(x_o)h'(x_o)}{h^2(x_o)}=\frac{g(x_o)}{h^2(x_o)}\neq 0\quad (3)$$

Οι (2) και (3) οδηγούν σε άτοπο. Επομένως το $h(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

**** 26. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και έχει τις ιδιότητες:**

α) $f(x)\neq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

β) $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

γ) $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \dfrac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $c_1, c_2 \in (\alpha,\beta)$, τέτοια ώστε:

$$f(c_1)f''(c_1)+f(c_2)f''(c_2)>0$$

Απόδειξη: θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Για την συνάρτηση g ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα υπάρχει $c_1 \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(c_1)=0 \iff \frac{[f'(c_1)]^2-f(c_1)f''(c_1)}{[f'(c_1)]^2}=0 \iff [f'(c_1)]^2=f(c_1)f''(c_1) \implies$$

$$\implies f(c_1)f''(c_1)>0 \quad (1)$$

θέτουμε $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Για τη συνάρτηση h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα υπάρχει $c_2 \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$h'(c_2)=0 \iff \frac{f''(c_2)f(c_2)-[f'(c_2)]^2}{[f(c_2)]^2}=0 \iff f''(c_2)f(c_2)=[f'(c_2)]^2 \implies$$

$$\implies f''(c_2)f(c_2)>0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $f(c_1)f''(c_1)+f(c_2)f''(c_2)>0$

**** 27. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$ (1).**

α) Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση g, με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_0}$ και $x_0 \notin [\alpha,\beta]$ υπάρχει αριθμός $\xi \in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0$.

β) Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη (ε) του διαγράμματος της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ περνά από το σημείο $N(x_0,0)$.

(Θέμα Πανελληνίων εξετάσεων)

Απόδειξη:

α) Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Είναι:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-f(x)}{(x-x_0)^2} \quad (2)$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Είναι ακόμα:

$$g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha-x_0} \overset{(1)}{=} 0, \quad g(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta-x_0} \overset{(1)}{=} 0$$

δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=0 \quad (3)$$

β) Η (3) είναι ισοδύναμη με την:

$$\frac{f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)}{(\xi-x_0)^2}=0 \iff f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)=0 \iff f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-x_0} \quad (4)$$

Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ του διαγράμματος της f έχει εξίσωση:

$$\psi-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \overset{(4)}{\iff} \psi-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x-\xi) \quad (5)$$

Οι συντεταγμένες $(x_0,0)$ του σημείου N επαληθεύουν την (5). Πράγματι είναι

$$0-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x_0-\xi) \iff -f(\xi)=-f(\xi)$$

Άρα η (ε) περνά από το σημείο $N(x_0,0)$.

***** 28. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ & παραγωγίσιμη στο (α,β).**

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που:

$$f'(\rho)=\frac{-(2\rho-\alpha-\beta)f(\rho)}{(\rho-\alpha)(\rho-\beta)} \quad (1)$$

β) Αν ακόμα $\alpha>0$, $\beta>0$ και $f(\beta)=0$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που: $[f'(\rho)(\rho-\alpha)+f(\rho)]\rho=f(\rho)(\rho-\alpha)$ **(I)**

Απόδειξη:

α) Η (1) γράφεται: $f'(\rho)(\rho-\alpha)(\rho-\beta)+(2\rho-\alpha-\beta)f(\rho)=0 \quad (2)$

Η (2) για $\rho=x$ δίνει:

$$f'(x)(x-\alpha)(x-\beta)+(2x-\alpha-\beta)f(x)=0 \iff [f(x)(x-\alpha)(x-\beta)]'=0 \quad (3)$$

Η (3) μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$. Για τη g ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Πράγματι η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(\alpha)=0=g(\beta)$. Άρα υπάρχει $\rho \in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που:

$$g'(\rho)=0 \quad (4)$$

Είναι: $g'(x)=f'(x)(x-\alpha)(x-\beta)+(2x-\alpha-\beta)f(x) \implies$

$$\implies g'(\rho)=f'(\rho)(\rho-\alpha)(\rho-\beta)+(2\rho-\alpha-\beta)f(\rho) \overset{(4)}{=} 0 \implies f'(\rho)=-\frac{(2\rho-\alpha-\beta)f(\rho)}{(\rho-\alpha)(\rho-\beta)}$$

β) Η (I) γράφεται: $[f'(\rho)(\rho-\alpha)+f(\rho)]\rho-f(\rho)(\rho-\alpha)=0 \quad$ (II)

Η (II) για $\rho=x$ δίνει:

$$[f'(x)(x-\alpha)+f(x)]x-f(x)(x-\alpha)=0 \iff \left[\frac{f(x)(x-\alpha)}{x}\right]'=0 \quad (III)$$

Η (III) μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την g, με $g(x)=\dfrac{f(x)(x-\alpha)}{x}$. Η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) (εφόσον $0\notin(\alpha,\beta)$). Είναι ακόμα:

$$g(\alpha)=\frac{f(\alpha)(\alpha-\alpha)}{\alpha}=0,\quad g(\beta)=\frac{f(\beta)(\beta-\alpha)}{\beta}=0$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\rho\in(\alpha,\beta)$, ώστε:

$$g'(\rho)=0 \quad \text{(IV)}$$

Είναι:
$$g'(x)=\frac{[f'(x)(x-\alpha)+f(x)]x-f(x)(x-\alpha)}{x^2}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g'(\rho)=\frac{[f'(\rho)(\rho-\alpha)+f(\rho)]\rho-f(\rho)(\rho-\alpha)}{\rho^2}\overset{(IV)}{=\!=}0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [f'(\rho)(\rho-\alpha)+f(\rho)]\rho-f(\rho)(\rho-\alpha)=0$$

***** 29. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow R$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με δεύτερη παράγωγο στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{f(\lambda)\,[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}$, $\alpha<\lambda<\beta$. Με εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle στη συνάρτηση F, με $F(x)=f(x)-g(x)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\dfrac{2f(\lambda)}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}$.**

(J. Massena "Calculus")

Απόδειξη: Η F είναι ορισμένη στο $[\alpha,\lambda]$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\lambda]$. Είναι $F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)-0=f(\alpha)=0$ και $F(\lambda)=f(\lambda)-g(\lambda)=f(\lambda)-f(\lambda)=0$ Άρα $F(\alpha)=F(\lambda)$. Έτσι λοιπόν, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\lambda]$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος στο διάστημα $[\lambda,\beta]$.

Έτσι λοιπόν, υπάρχει $x_1\in(\alpha,\lambda)$, τέτοιο που $F'(x_1)=0$ και υπάρχει $x_2\in(\lambda,\beta)$, τέτοιο που $F'(x_2)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$P(x)=F'(x)=f'(x)-g'(x)$$

Για την P ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$ (διότι η P είναι ορισμένη στο $[x_1,x_2]$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ και $P(x_1)=F'(x_1)=0=F'(x_2)=P(x_2)$). Άρα υπάρχει ένα $\xi\in(x_1,x_2)$, τέτοιο που: $P'(\xi)=0\iff F''(\xi)=0\iff f''(\xi)-g''(\xi)=0\iff$

$$\iff f''(\xi)-\frac{2f(\lambda)}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}=0\iff f''(\xi)=\frac{2f(\lambda)}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}.$$

30. Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής στις συναρτήσεις f, με:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, στο διάστημα $[2,6]$

β) $f(x)=\begin{cases}2x, & \forall x\in[-1,0]\\ -2x, & \forall x\in[0,1]\end{cases}$ στο διάστημα $[-1,1]$

γ) $f(x)=[x^4(x-2)]^{\frac{1}{3}}$ στο διάστημα $[-1,1]$

δ) $f(x)=x-\eta\mu x$, στο διάστημα $[0,\pi]$

Στις περιπτώσεις που το θεώρημα ισχύει, να προσδιοριστεί ο αριθμός ξ του θεωρήματος.

Λύση:

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[2,6]$. Άρα το θεώρημα της μέσης τιμής εφαρμόζεται.

Υπάρχει επομένως, αριθμός $\xi\in(2,6)$, τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}\iff -\frac{1}{\xi^2}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{4}\iff -\frac{1}{\xi^2}=-\frac{2}{24}\iff \xi^2=12\iff \xi=\pm2\sqrt{3}$$

Ο ξ του θεωρήματος είναι ο αριθμός $2\sqrt{3}$, εφόσον $2\sqrt{3}\in(2,6)$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο 0 Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Είναι $f'(x)=2$ $\forall x\in(-1,0)$ και $f'(x)=-2$ $\forall x\in(0,1)$. Εξετάζουμε την παράγωγο στο 0. Είναι:

$$f'_\alpha(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to0^-}2=2$$

Ανάλογα βρίσκουμε $f'_\delta(0)=-2$. Βλέπουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επειδή η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, δεν ισχύει το θεώρημα.

γ) Η f με $f(x)=[x^4(x-2)]^{\frac{1}{3}}$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{3}[x^4(x-2)]^{\frac{1}{3}-1}(x^5-2x^4)'=\frac{1}{3}[x^4(x-2)]^{-\frac{2}{3}}(5x^4-8x^3)=$$

$$=\frac{1}{3}(5x^4-8x^3)\frac{1}{\sqrt[3]{[x^4(x-2)]^2}}$$

Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επειδή η f δεν είναι παντού παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, το θεώρημα δεν ισχύει.

δ) Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ (άρα και στο $(0,\pi)$). Επομένως το Θ.Μ.Τ. εφαρμόζεται.

Έτσι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0} \iff 1-\text{συν}\xi=\frac{\pi-\text{ημ}\pi-(0-\text{ημ}0)}{\pi} \iff \text{συν}\xi=0 \iff \xi=\frac{\pi}{2}$$

**** 31. α) Να δειχθεί ότι ο τύπος του θεωρήματος της μέσης τιμής παίρνει τη μορφή:** $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$ **(1), $0<\theta<1$**

β) Να προσδιορισθεί ο θ του προηγουμένου τύπου στις συναρτήσεις f, με: I) $f(x)=x^2$, II) $f(x)=x^3$, III) $f(x)=\alpha x+\beta$.

γ) Τί συμπέρασμα βγαίνει από τις προηγούμενες εφαρμογές;

Λύση:

α) Θεωρούμε το διάστημα $[x,x+h]$. Έχουμε από το Θ.Μ.Τ., ότι:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} \quad (2), \quad \text{με } \xi\in(x,x+h) \iff x<\xi<x+h$$

Είναι $\xi-x>0$ και $h>0$ (διότι $x+h>x \Rightarrow h>0$). Άρα $\frac{\xi-x}{h}>0$. Επειδή $\xi<x+h$, είναι και:

$$\xi-x<h \iff \frac{\xi-x}{h}<1$$

Επομένως είναι $0<\frac{\xi-x}{h}<1$. Θέτουμε $\frac{\xi-x}{h}=\theta \iff \xi=x+h\theta$. Έτσι η (2) γράφεται: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+h\theta) \iff f(x+h)-f(x)=hf'(x+h\theta)$, $0<\theta<1$.

β) I) Αν $f(x)=x^2$, η (1) γράφεται:

$$(x+h)^2-x^2=h2(x+\theta h) \Rightarrow \theta=\frac{1}{2}$$

II) Αν $f(x)=x^3$, η (1) γράφεται:

$$(x+h)^3-x^3=h3(x+\theta h)^2 \iff 3h\theta^2+6x\theta-3x-h=0 \iff \theta=\frac{\sqrt{x^2+hx+\frac{1}{3}h^2}-x}{h}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός θ είναι συνάρτηση των x και h.

III) Αν $f(x)=\alpha x+\beta$ η (1) δίνει:

$$\alpha(x+h)+\beta-\alpha x-\beta=h\alpha \Rightarrow \alpha h=\alpha h$$

Άρα η (1) δεν εξαρτάται από το θ.

γ) Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι στην ισότητα (1) του Θ.Μ.Τ. το θ είναι δυνατόν να είναι σταθερό ή να είναι συνάρτηση των x, h ή η (1) να μην εξαρτάται από το θ.

32. Να δειχθεί ότι: α) $e^x\geq1+x$, $\forall x\in R$, β) $\ln x\leq x-1$, $\forall x\in R_+^*$.

Απόδειξη:

α) Αν $x=0$, τότε είναι $e^0=1+0$ (1), άρα η αποδεικτέα ισχύει σαν ισότητα. Υποθέτουμε ότι $x>0$. Θεωρούμε την f, με $f(x)=e^x-1-x$. Για την f στο $[0,x]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $\xi\in(0,x) \iff 0<\xi<x$, τέτοιος που $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff e^\xi-1=\frac{e^x-1-x}{x} \iff (e^\xi-1)x=e^x-1-x$ (2)

Το πρώτο μέλος της (2) είναι θετικό διότι $x>0$ και $e^\xi-1>0$ (είναι:

$$0<\xi \Rightarrow e^0<e^\xi \Rightarrow 1<e^\xi \Rightarrow 0<e^\xi-1)$$

Επομένως είναι $e^x-1-x>0 \iff e^x>1+x$ (3) για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Αν $x<0$ εργαζόμαστε ανάλογα, οπότε βρίσκουμε:

$$e^x>1+x \quad (4)$$

για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Από (1), (2) και (4) προκύπτει $e^x\geq1+x$, $\forall x\in R$.

β) Αν $x=1$, τότε είναι: $\ln 1=1-1$ (1)

άρα η αποδεικτέα ισχύει σαν ισότητα. Αν $1<x$, τότε για την f, με $f(x)=\ln x-x+1$ στο $[1,x]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi\in(1,x)$, τέτοιο που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \iff \frac{1}{\xi}-1=\frac{\ln x-x+1}{x-1} \iff \frac{1-\xi}{\xi}(x-1)=\ln x-x+1 \quad (2)$$

Είναι $\xi>0$, $x-1>0$ (εφόσον $x>1$), $1-\xi<0$ (εφόσον $\xi>1$). Άρα το πρώτο μέλος της (2) είναι αρνητικό. Επομένως είναι:

$$\ln x-x+1<0 \iff \ln x<x-1 \quad (3), \quad \forall x\in(1,+\infty)$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι: $\ln x<x-1$ (4), $\forall x\in(0,1)$

Από (1), (3) και (4), προκύπτει ότι $\ln x\leq x-1$, $\forall x\in R_+^*$.

**** 33. Να δειχθούν οι ανισότητες:**

α) $|\text{ημ}\beta-\text{ημ}\alpha|\leq|\beta-\alpha|$, $\forall \alpha,\beta\in R$

β) $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$, $0<\alpha<1$, $x>0$

γ) $\text{εφ}\alpha<\frac{\ln\text{συν}\alpha-\ln\text{συν}\beta}{\beta-\alpha}<\text{εφ}\beta$, $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

δ) $\frac{1}{3}<\ln 1{,}5<\frac{1}{2}$ (Gentile R. "Notas de Algebra")

Απόδειξη:

α) Αν $\alpha=\beta$, τότε η αποδεικτέα ισχύει σαν ισότητα. Υποθέτουμε ότι $\alpha<\beta$ και $f(x)=\text{ημ}x$, με $x\in[\alpha,\beta]$. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος

της μέσης τιμής, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi) \iff$

$$\iff \eta\mu\beta-\eta\mu\alpha=(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\xi \quad (1)$$

Η (1) δίνει $|\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta|=|(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\xi|=|\beta-\alpha|\,|\sigma\upsilon\nu\xi|\le|\beta-\alpha|1=|\beta-\alpha|$. Επομένως είναι:

$$|\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta|\le|\beta-\alpha|,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,x]$, $x>0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,x)$, τέτοιος ώστε

$$f(x)-f(0)=(x-0)f'(\xi) \quad (1)$$

Είναι: $$f(0)=0 \quad (2)$$

και: $$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$$

άρα: $$f'(\xi)=\alpha(1+\xi)^{\alpha-1}-\alpha \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) και (3), προκύπτει:

$$f(x)=\alpha x\left[(1+\xi)^{\alpha-1}-1\right]$$

Επειδή $\alpha x>0$, αρκεί να δείξουμε ότι $(1+\xi)^{\alpha-1}-1<0$ (διότι τότε θα είναι $f(x)<0$) $\iff (\alpha-1)\ln(1+\xi)<\ln 1 \iff (\alpha-1)\ln(1+\xi)<0$ (4). Είναι:

$$\alpha<1 \iff \alpha-1<0$$

και: $$\xi>0 \implies \xi+1>1 \implies \ln(1+\xi)>0$$

Άρα η (4) ισχύει, επομένως ισχύει και η ισοδύναμή της $(1+\xi)^{\alpha-1}-1<0$

Έτσι είναι $f(x)<0 \iff (1+x)^{\alpha}-1-\alpha x<0 \iff (1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\ln\sigma\upsilon\nu x$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi) \iff \frac{\ln\sigma\upsilon\nu\beta-\ln\sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta-\alpha}=-\varepsilon\varphi\xi \iff \frac{\ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}=\varepsilon\varphi\xi \quad (1)$$

(είναι $f'(x)=-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\varepsilon\varphi x$). Η συνάρτηση f είναι ↑ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$0<\alpha<\xi<\beta<\frac{\pi}{2} \implies \varepsilon\varphi\alpha<\varepsilon\varphi\xi<\varepsilon\varphi\beta \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta$$

δ) Η συνάρτηση f, με $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[1\ ,\ 1{,}5]$ είναι συνεχής παραγωγίσιμη.

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in(1\ ,\ 1{,}5)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} \implies \frac{1}{\xi}=\frac{\ln 1{,}5-\ln 1}{0{,}5} \implies \frac{1}{\xi}=\frac{\ln 1{,}5}{0{,}5} \quad (1)$$

Αλλά: $$1<\xi<1{,}5=\frac{3}{2} \implies 1>\frac{1}{\xi}>\frac{2}{3} \iff \frac{2}{3}<\frac{1}{\xi}<1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{2}{3}<\frac{\ln 1{,}5}{0{,}5}<1 \implies \frac{2}{3}0{,}5<\ln 1{,}5<0{,}5 \implies \frac{1}{3}<\ln 1{,}5<\frac{1}{2}$$

34. Να δειχθεί ότι:

α) $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$, **όταν** $x>0$, **β)** $e^x<\frac{e^x-1}{x}<1$ **, όταν** $x<0$, **γ)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x$. Για την f στο διάστημα $[0,x]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff e^{\xi}=\frac{e^x-1}{x} \quad (1)$$

Είναι: $$0<\xi<x \implies e^0<e^{\xi}<e^x \quad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$e^0<\frac{e^x-1}{x}<e^x \iff 1<\frac{e^x-1}{x}<e^x \quad (3)$$

β) Δείχνεται ανάλογα.

γ) Η (3) δίνει $\lim_{x\to 0^+}1\le\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\le\lim_{x\to 0^+}e^x$. Είναι $\lim_{x\to 0^+}1=1$ και $\lim_{x\to 0^+}e^x=e^0=1$. Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Ανάλογα από την (3) βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Επομένως είναι: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

**** 35. Να δειχθούν οι ανισότητες:**

α) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$, **με** $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

β) $e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in R$, $\alpha\neq\beta$

γ) $\frac{1}{\alpha+1}<\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)<\frac{1}{\alpha}$, $\forall\alpha>0$

δ) $\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}<\frac{1}{2\mu}$, $\mu,\nu\in N^*$, **με** $\nu>\mu^2$

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\varepsilon\varphi x$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, θα υπάρχει ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\iff\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}=\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}\qquad(1)$$

Επειδή η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu x>0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι:

$$\beta>\xi>\alpha\implies\sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha\implies\sigma\upsilon\nu^2\beta<\sigma\upsilon\nu^2\xi<\sigma\upsilon\nu^2\alpha\implies$$

$$\implies\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}>\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}>\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\implies\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\qquad(2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**, άρα και στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Επομένως υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο που:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\qquad(1)$$

(1) επειδή $f'(\xi)=e^{\xi}$, δίνει: $\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}=e^{\xi}$ (2)

Η αποδεικτέα γράφεται: $e^\alpha<e^\xi<e^\beta$ (3)

Η (3) είναι προφανής, εφόσον $\alpha<\xi<\beta$ και η f είναι ↑.

γ) Η αποδεικτέα γράφεται:

$$\frac{1}{\alpha+1}<\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)<\frac{1}{\alpha}\iff\frac{1}{\alpha+1}<\ln(\alpha+1)-\ln\alpha<\frac{1}{\alpha}\qquad(2),\quad\forall\alpha>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\ln x$ Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R^*_+, άρα και στο $[\alpha,\alpha+1]$. Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής. Υπάρχει λοιπόν, $\xi\in(\alpha,\alpha+1)\iff\alpha<\xi<\alpha+1$ (1), τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}\iff\frac{1}{\xi}=\frac{\ln(\alpha+1)-\ln(\alpha)}{1}\iff\frac{1}{\xi}=\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\qquad(2)$$

Η (1) δίνει: $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{\alpha+1}\iff\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{\alpha}$ (3)

Οι (2) και (3) δίνουν:

$$\frac{1}{\alpha+1}<\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)<\frac{1}{\alpha}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f. με $f(x)=\sqrt{x}$, στο διάστημα $[\nu,\nu+1]$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής ισχύουν, άρα υπάρχει $\xi\in(\nu,\nu+1)$, τέτοιο που:

$$f'(\xi)=\frac{f(\nu+1)-f(\nu)}{\nu+1-\nu}\iff\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}\qquad(1)$$

Είναι: $\nu<\xi<\nu+1\implies\mu^2<\nu<\xi<\nu+1\implies\mu^2<\xi\implies\frac{1}{\xi}<\frac{1}{\mu^2}\implies$

$$\implies\frac{1}{\sqrt{\xi}}<\frac{1}{\mu}\implies\frac{1}{2\sqrt{\xi}}<\frac{1}{2\mu}\qquad(2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν: $\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}<\frac{1}{2\mu}$

36. Να δειχθεί ότι η διαφορά των τετραγωνικών ριζών δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του κ^2, είναι μικρότερη του $1/2\kappa$, $\kappa\in N^*$.

(Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης)

Απόδειξη: Έστω ότι $\nu\in N^*$, με $\nu>\kappa^2$ (1) και $\nu+1>\kappa^2$. Θεωρούμε την f, με $f(x)=\sqrt{x}$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Lagrange* στο διάστημα $[\nu,\nu+1]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(\nu,\nu+1)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(\nu+1)-f(\nu)}{\nu+1-\nu}\iff\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=f(\nu+1)-f(\nu)\qquad(2)$$

Είναι $\nu<\xi<\nu+1$, επομένως δυνάμει της (1), είναι:

$$\kappa^2<\xi\implies\kappa<\sqrt{\xi}\iff\frac{1}{\kappa}>\frac{1}{\sqrt{\xi}}\iff\frac{1}{2\kappa}>\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\overset{(2)}{\implies}\frac{1}{2\kappa}>f(\nu+1)-f(\nu)$$

****** 37. Θεωρούμε την συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).***

α) Αν $f(x)>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)}{\alpha-\beta}$$

β) Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)e^{f(\xi)}=\frac{e^{f(\beta)}-e^{f(\alpha)}}{\beta-\alpha}$$

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=\ln f(x)$, που είναι συνεχής στο

---
* Το θεώρημα της μέσης τιμής λέγεται και θεώρημα του Lagrange.

$[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), με $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0,\ \forall x\in(\alpha,\beta)$, εφόσον $f(x)>0,\ \forall x\in(\alpha,\beta))$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε: $g'(\xi)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \iff \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)}{\alpha-\beta}$.

β) Η h, με $h(x)=e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος που:

$$h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha} \iff f'(\xi)e^{f(\xi)}=\frac{e^{f(\beta)}-e^{f(\alpha)}}{\beta-\alpha}$$

(είναι $h'(x)=f'(x)e^{f(x)}$).

**** 38. Δίνεται η συνάρτηση g, που είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Αν $g(2)=1$ και $f(x)=\left[g(x)-\eta\mu\frac{\pi}{x}\right]\ln x$ (1):**

α) να δειχθεί ότι για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

β) να γίνει εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[1,2]$.

Απόδειξη:

α) Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, διότι οι g, h (με $h(x)=\eta\mu\frac{\pi}{x}$) και φ (με $\varphi(x)=\ln x$) είναι συνεχείς στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμες στο $(1,2)$. Είναι:

$$f(1)=\left[g(1)-\eta\mu\frac{\pi}{1}\right]\ln 1=0 \quad \text{και}$$

$$f(2)=\left[g(2)-\eta\mu\frac{\pi}{2}\right]\ln 2=(1-1)\ln 2=0$$

Άρα $f(1)=f(2)$. Έτσι για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[1,2]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιος που $f'(\xi)=0$.

β) Το θεώρημα της Μ.Τ. ισχύει για την f στο διάστημα $[1,2]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \iff f'(\xi)=0$$

(παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο συμπέρασμα με το προηγούμενο ερώτημα, πράγμα που περιμέναμε διότι το Θ.Μ.Τ. είναι γενίκευση του θεωρήματος του Rolle).

***** 39. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\theta-h,\theta+h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\theta-h,\theta+h)$ $(\theta\in R,\ h\in R_+^*)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιος ώστε:**

α) $f(\theta+h)-f(\theta-h)=h\left[f'(\theta+\xi h)+f'(\theta-\xi h)\right]$

β) $f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta)=h\left[f'(\theta+\xi h)-f'(\theta-\xi h)\right]$ (Μαθηματικό Αθηνών)

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση F, με $F(x)=f(\theta+xh)-f(\theta-xh)$. Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της F. Υποθέτουμε ότι $g(x)=f(\theta+xh)$, με $\varphi(x)=\theta+xh$. Είναι:

$$g(x)=f(\varphi(x))$$

Πεδίο ορισμού της φ είναι το **R**. Πεδίο ορισμού της f είναι το $[\theta-h,\theta+h]$. Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο:

$$A_1=\{x\in \mathbf{R}:\ \varphi(x)\in[\theta-h,\theta+h]\}=\{x\in \mathbf{R}:\ \theta-h\leq\theta+xh\leq\theta+h\}=\{-h\leq xh\leq h\}=[-1,1]$$

Έστω ότι $W(x)=f(\theta-xh)$, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της W είναι το $[-1,1]$. Επομένως η F έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[\theta-h,\theta+h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\theta-h,\theta+h)$. Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R. Άρα η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Όμοια δείχνουμε ότι η W είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Έτσι λοιπόν, η F είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Άρα η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.

Έτσι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιος που:

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0} \iff F'(\xi)=F(1)-F(0) \qquad (1)$$

Είναι: $$F'(x)=f'(\theta+xh)(\theta+xh)'-f'(\theta-xh)(\theta-xh)' \iff$$

$$\iff F'(x)=f'(\theta+xh)h+f'(\theta-xh)h \implies F'(\xi)=f'(\theta+\xi h)h+f'(\theta-\xi h)h$$

και: $$F(1)=f(\theta+h)-f(\theta-h), \quad F(0)=f(\theta)-f(\theta)=0$$

Έτσι η (1) δίνει:

$$f'(\theta+\xi h)h+f'(\theta-\xi h)h=f(\theta+h)-f(\theta-h) \iff f(\theta+h)-f(\theta-h)=h\left[f'(\theta+\xi h)+f'(\theta-\xi h)\right]$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση F, με $F(x)=f(\theta+xh)+f(\theta-xh)$. Με ίδιο τρόπο με την προηγούμενη απόδειξη δείχνουμε ότι για την F στο $(0,1)$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$, άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιο που:

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0} \iff F'(\xi)=F(1)-F(0) \qquad (2)$$

Είναι: $$F'(x)=f'(\theta+xh)(\theta+xh)'+f'(\theta-xh)(\theta-xh)' \implies$$

$$\Longrightarrow F'(x)=f'(\theta+xh)h-f'(\theta-xh)h \Longrightarrow F'(\xi)=f'(\theta+\xi h)h-f'(\theta-\xi h)h$$

Είναι: $F(1)=f(\theta+h)+f(\theta-h)$ και $F(0)=2f(\theta)$

Η (2) δίνει: $f'(\theta+\xi h)h-f'(\theta-\xi h)h=f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta)=h[f'(\theta+\xi h)-f'(\theta-\xi h)]$$

***40. **Η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Σε ποια περίπτωση υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε να είναι:**

$$f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2f''(\xi_1);$$

(Rudin W. "Analysis")

Απόδειξη: Η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, άρα η f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ (έχει πρώτη παράγωγο) και είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (1)$$

Η συνάρτηση f΄ παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ (εφόσον υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στο $[\alpha,\beta]$), άρα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $[\alpha,\xi]\subset[\alpha,\beta]$, για την f΄ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\xi]$. Άρα υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\xi)$, τέτοιος ώστε:

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(\xi)-f'(\alpha)}{\xi-\alpha} \Longleftrightarrow f'(\xi)=f'(\alpha)+(\xi-\alpha)f''(\xi_1) \qquad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\alpha)+(\xi-\alpha)f''(\xi_1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+(\beta-\alpha)(\xi-\alpha)f''(\xi_1) \qquad (3)$$

Στην περίπτωση που το ξ είναι μέσον του $[\alpha,\beta]$ είναι $\xi=\frac{\alpha+\beta}{2}$, οπότε η (3) δίνει: $f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+(\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)f''(\xi_1) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2f''(\xi_1)$$

***41. **α) Δίνεται η συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f, που είναι και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $|f'(x)|<\lambda$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, $\lambda>0$ και $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, να δειχθεί ότι:** $|f(\xi_2)-f(\xi_1)|<\lambda|\xi_1-\xi_2|$

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, $f'(x)\geq\kappa$, $\forall x\in[0,1]$ $\kappa>0$ και $f(0)=0$, να δειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$, με $\beta-\alpha=1/2$ ώστε: $f(x)\geq\frac{\kappa}{2}$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

α) Είναι $[\xi_1,\xi_2]\subset[\alpha,\beta]$. Άρα η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, τέτοιο που:

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} \Longrightarrow f(\xi_2)-f(\xi_1)=f'(\xi)(\xi_2-\xi_1) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |f(\xi_2)-f(\xi_1)|=|f'(\xi)(\xi_2-\xi_1)| \Rightarrow |f(\xi_2)-f(\xi_1)|=|f'(\xi)||\xi_2-\xi_1|<\lambda|\xi_1-\xi_2|$$

(είναι $|f'(x)|<\lambda$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, άρα είναι και $|f'(\xi)|<\lambda$. Επίσης είναι $|\xi_2-\xi_1|=|\xi_1-\xi_2|$).

β) Έστω ότι $0<x<1$. Στο διάστημα $[0,x]$ εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Longleftrightarrow f'(\xi)x=f(x) \Longrightarrow f(x)=xf'(\xi)\geq x\kappa \Longrightarrow$$

(διότι είναι $f'(x)\geq\kappa$) $\Longrightarrow f(x)\geq x\kappa \quad (1), \quad \forall x\in(0,1)$)

Έστω ότι $x\geq\frac{1}{2}$. Η (1) δίνει $f(x)\geq\frac{\kappa}{2}$. Έτσι λοιπόν, υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]=\left[\frac{1}{2},1\right]$, με $\beta-\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, ώστε $f(x)\geq\frac{\kappa}{2}$.

42. Δίνεται η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1,x_2]$, για κάθε $x_1,x_2\in R$. Αν ο αριθμός ξ του θεωρήματος είναι μέσο του $[x_1,x_2]$ και υπάρχει η $f''(x)$, για κάθε $x\in R$, να δειχθεί ότι $f(x)=\alpha x^2+\beta x+c$.

Απόδειξη: Επειδή ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[x_1,x_2]$, θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

Επειδή $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$, θα είναι:

$$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Longleftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(x_1)=f(x_2)+(x_1-x_2)f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad (2)$$

Παραγωγίζουμε τη (2) με μεταβλητή το x_1 (θεωρούμε τη x_2 σταθερή), οπότε έχουμε:

$$f'(x_1)=f'(x_2)+(x_1-x_2)'f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(x_1-x_2)f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)' \Longleftrightarrow$$

$$\iff f'(x_1)=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(x_1-x_2)f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\frac{1}{2} \qquad (2)$$

(είναι $f'(x_2)=0$ εφόσον x_2 σταθερή). Η (2), για $x_2=-x_1$, δίνει:

$$f'(x_1)=f'(0)+x_1f''(0) \qquad (3)$$

Η (3), για $f'(0)=\beta$, $f''(0)=2\alpha$ και $x_1=x$, δίνει:

$$f'(x)=2\alpha x+\beta \implies f(x)=\alpha x^2+\beta x+c$$

43. Σε ποιο σημείο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη προς την ευθεία που περνά από τα σημεία M_1, M_2, όταν:

α) $f(x)=\ln x$, $M_1(1,0)$, $M_2(e,1)$

β) $f(x)=\log x$, $M_1(1,0)$, $M_2(10,1)$.

Λύση:

α) Τα σημεία M_1 και M_2 είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, διότι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών επαληθεύουν την $\psi=\ln x$ (πράγματι για $x=1 \implies \psi=\ln 1=0$ και για $x=e \implies \psi=\ln e=1$).

Θεωρούμε το διάστημα $[1,e]$. Στο διάστημα αυτό η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Άρα θα υπάρχει $\xi\in(1,e)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{\ln e-\ln 1}{e-1} \iff \frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{\xi} \iff \xi=e-1$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο έχει τετμημένη $e-1$ και τεταγμένη $\ln(e-1)$ (η τεταγμένη προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης αν θέσουμε όπου $x=e-1$).

Είναι γνωστό ότι ο τύπος του θεωρήματος της μέσης τιμής $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi)$, εξασφαλίζει την παραλληλία της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ και της ευθείας που περνά από τα σημεία $M_1(\alpha,f(\alpha))$, $M_2(\beta,f(\beta))$

β) Τα σημεία M_1, M_2 ανήκουν στο διάγραμμα της f, διότι οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τον τύπο της. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,10]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(1,10)$, τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{\log 10-\log 1}{10-1} \qquad (1)$$

Είναι:

$$f(x)=\log x \implies f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$$

Έτσι είναι $f'(\xi)=\frac{1}{\xi\ln 10}$. Είναι ακόμα $\log 10=1$, $\log 1=0$. Η (1) επομένως γράφεται:

$$\frac{1}{\xi\ln 10}=\frac{1}{9} \iff \xi\ln 10=9 \iff \xi=\frac{9}{\ln 10}$$

Το σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{9}{\ln 10},\ \log\left(\frac{9}{\ln 10}\right)\right)$ είναι το ζητούμενο, σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος της μέσης τιμής.

44. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2$. Σε ποιο σημείο η εφαπτομένη (ε) του διαγράμματος της f είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε_1), με εξίσωση $\psi=x$;

Λύση: Η ευθεία $\psi=x$ και το διάγραμμα της f έχουν κοινά σημεία M_1, M_2 που οι συντεταγμένες τους είναι λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}\psi=x\\ \psi=x^2\end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Το (Σ) δίνει $(x=1,\psi=1)$ ή $(x=0,\psi=0)$. Άρα είναι $M_1(1,1)$, $M_2(0,0)$.

Θεωρούμε το διάστημα $[0,1]$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \iff 2\xi=1 \iff \xi=\frac{1}{2}$$

Το σημείο με τετμημένη $\xi=\frac{1}{2}$ και τεταγμένη $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ είναι το ζητούμενο σημείο, σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος της μέσης τιμής.

45. α) Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R_+^*. Αν $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$ και $f(x+1)-f(x)=h(x)$ (1), τότε είναι $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_+ και $f'(x)\geq 1$, $\forall x\in R_+$, να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

Απόδειξη:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R_+^*, άρα και συνεχής στο R_+^*. Θεωρούμε το διάστημα $[x,x+1]$, $\forall x\in R_+^*$. Στο διάστημα αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής. Άρα υπάρχει $x+\theta\in[x,x+1]$, με $0<\theta<1$, τέτοιος που:

$$f'(x+\theta)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \iff f'(x+\theta)=f(x+1)-f(x) \overset{(1)}{\iff} f'(x+\theta)=h(x) \qquad (2)$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, άρα $\lim_{x\to+\infty}f'(x+\theta)=0$. Έτσι η (2) δίνει $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$.

β) Θεωρούμε το διάστημα $[0,x]$, $x>0$ στο διάστημα αυτό ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$, τέτοιος που $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Είναι $f'(x)\geq 1$, $\forall x\in R_+$, άρα είναι και $f'(\xi)\geq 1$. Έτσι είναι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq 1 \iff f(x)-f(0)\geq x \iff f(x)\geq x+f(0)$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}[x+f(0)]=+\infty$. Επομένως είναι και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**** 46. Δίνεται μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει**

$$|f'(x)|\le|x_1-x_2|, \quad \forall x\in R, \quad \forall x_1,x_2\in R \quad (x_1\neq x_2)$$

α) Να δειχθεί ότι $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^2$, $\forall x_1,x_2\in R$

β) Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο R.

Απόδειξη:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, επομένως και σ' ένα διάστημα της μορφής $[x_1,x_2]$, $\forall x_1,x_2\in R$ $(x_1<x_2)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι και συνεχής σαν παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Longrightarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(\xi)|\le|x_1-x_2| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^2$$

β) Είναι: $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le|x_1-x_2| \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow -|x_1-x_2|\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le|x_1-x_2| \quad (1)$$

Παίρνουμε τα όρια των δυο μελών της (1), όταν $x_1 \longrightarrow x_2$. Έχουμε:

$$0\le\lim_{x_1\to x_2}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le 0 \Longrightarrow \lim_{x_1\to x_2}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0 \Longrightarrow f'(x_2)=0, \ \forall x_2\in R$$

Άρα είναι: $f'(x)=0 \Longrightarrow f(x)=c$

***** 47. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Cauchy, να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:**

$$f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\xi)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συναρτήσεις g και h με $g(x)=f(\beta)-f(x)-(\beta-x)f'(x)$ και $h(x)=(\beta-x)^2$, που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Cauchy. Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε:

$$[g(\beta)-g(\alpha)]h'(\xi)=[h(\beta)-h(\alpha)]g'(\xi) \quad (1)$$

Είναι: $g'(x)=-f'(x)+f'(x)-(\beta-x)f''(x)=-(\beta-x)f''(x)$

και $h'(x)=-2(\beta-x)$, οπότε $g'(\xi)=-(\beta-\xi)f''(\xi)$, $h'(\xi)=-2(\beta-\xi)$. Η (1) δίνει:

$$-[g(\beta)-g(\alpha)]2(\beta-\xi)=-[h(\beta)-h(\alpha)](\beta-\xi)f''(\xi) \quad (2)$$

Είναι ακόμα $g(\beta)-g(\alpha)=0-f(\beta)+f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)$ και $h(\beta)-h(\alpha)=0-(\beta-\alpha)^2$.

Άρα η (2) δίνει $f(\beta)=f(\alpha)+(\beta-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\xi)$

48. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα f'=f, αν και μόνο αν: $f(x)=ce^x$

Απόδειξη: Είναι: $(ce^x)'=ce^x \Longrightarrow f'=f$

Αντιστρόφως, έστω μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f'=f. Θα δείξουμε ότι: $f(x)=ce^x$. Θεωρούμε την F, με $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. Η F είναι παραγωγίσιμη και:

$$F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=0$$

Επειδή $F'(x)=0$, $\forall x\in R$ είναι $F(x)=c$, $\forall x\in R$. Άρα:

$$\frac{f(x)}{e^x}=c \Longleftrightarrow f(x)=ce^x$$

**** 49. α) Να προσδιοριστεί μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R, ώστε $f'=3f$ (1), $\forall x\in R$.**

β) Αν υποθέσουμε ότι f(x) είναι μια λύση της (1), για την οποία $f(0)=3$, να λυθεί στο R η εξίσωση $[f(x)]^2-4[f(x)]-5=0$ (A).

Λύση:

α) Έστω $\psi=f(x)$, τότε η (1) γράφεται $\psi'=3\psi$ (2). Προφανής λύση της (2) είναι η συνάρτηση $\psi=f(x)=0$. Έστω $\psi\neq0$, τότε η (2) γράφεται $\frac{\psi'}{\psi}=3$, δηλαδή $(\ln\psi)'=(3x)'$ (διότι $(\ln\psi)'=\frac{\psi'}{\psi}$ και $(3x)'=3$).

Επειδή οι συναρτήσεις $\ln\psi=\ln f(x)$ και $3x$ έχουν ίσες παραγώγους διαφέρουν κατά μια σταθερά, άρα:

$$\ln\psi-3x=c \Longleftrightarrow \ln\psi=3x+c \quad (3) \quad (c\in R)$$

Θέτουμε $c=\ln\alpha$ $(\alpha>0)$. Η (3) δίνει:

$$\ln\psi=3x+\ln\alpha \Longleftrightarrow \ln\frac{\psi}{\alpha}=3x \Longleftrightarrow \frac{\psi}{\alpha}=e^{3x} \Longleftrightarrow \psi=e^{3x}\alpha$$

δηλαδή $f(x)=\psi=e^{3x}\alpha$ (4). Η (4) αποτελεί τις λύσεις της (1).

β) Η (4) για x=0 δίνει $f(0)=e^0\alpha=\alpha=3$, οπότε έχουμε τη λύση (από (4))

$$f(x)=3e^{3x} \quad (5)$$

Η (A) γράφεται δυν. (5): $(3e^{3x})^2-4(3e^{3x})-5=0$. Η τελευταία εξίσωση επιλύεται με την αντικατάσταση $3e^{3x}=\omega$. Έτσι έχουμε $\omega^2-4\omega-5=0$ με ρίζες ($\omega_1=5$ ή $\omega_2=-1$). Επομένως είναι $3e^{3x}=5$ ή $3e^{3x}=-1$. Η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη, εφόσον $3e^{3x}>0$.

Η εξίσωση $3e^{3x}=5$, λύνεται ως εξής:

$3e^{3x}=5 \iff e^{3x}=\frac{5}{3} \iff \ln e^{3x}=\ln\frac{5}{3} \iff 3x\ln e=\ln\frac{5}{3} \iff 3x=\ln\frac{5}{3} \iff x=\frac{\ln\frac{5}{3}}{3}$

50. Να βρεθεί η οικογένεια των καμπυλών των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=e^x$. Στη συνέχεια να βρεθεί η καμπύλη της οικογένειας που περνά από το σημείο (1,0).

Λύση: Είναι $\lambda=f'(x)=e^x$. Άρα $f(x)=e^x+c$. Έτσι η οικογένεια των καμπυλών έχει εξίσωση:

$$\psi=e^x+c$$

Για να περνά η καμπύλη της οικογένειας από το σημείο (1,0), πρέπει:

$$0=e+c \implies c=-e$$

Άρα η ζητούμενη καμπύλη έχει εξίσωση:

$$\psi=e^x-e$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Γενικά

Ο υπολογισμός του ορίου μιας συνάρτησης, όταν $x \longrightarrow x_0$ ή $x \longrightarrow \pm\infty$ οδηγεί πολλές φορές σε μια από τις επόμενες απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad (+\infty)-(+\infty),\quad 0^0,\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0,\quad 0(\pm\infty)$$

Στις περιπτώσεις αυτές (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των ορίων) προσπαθούμε να κάνουμε όπως λέμε, "άρση της απροσδιοριστίας", δηλαδή να βρούμε την πραγματική τιμή του ορίου. Αυτό όπως είδαμε το επιτυγχάνουμε με κατάλληλα τεχνάσματα.

Στα επόμενα θα αναφέρουμε θεωρήματα με τη βοήθεια των οποίων (εφόσον συντρέχουν ορισμένες προϋποθέσεις), μπορούμε να κάνουμε "άρση της απροσδιοριστίας".

Θεώρημα 1 (κανόνας του De l΄ Hospital*):

Αν για $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παραδείγματα:

1. **Να υπολογισθεί το** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx-x}{x^2-x}$.

Λύση:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=ημx-x$ και $g(x)=x^2-x$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$.

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{συνx-1}{2x-1}=\frac{0}{-1}$ είναι και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx-x}{x^2-x}=0.$$

2. **Να υπολογισθεί το** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Λύση:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-5x+6$ και $g(x)=x-2$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$.

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{1}=-1$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

3. **Να υπολογισθεί το** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}$.

Λύση: Έστω ότι $f(x)=ημx$ και $g(x)=x$. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, επομένως το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο **R** και $g'(x)=1$, $\forall x\in \mathbf{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{συνx}{1}=\lim_{x\to 0}συνx=1$$

Επομένως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$$

Παρατηρήσεις:

1. Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και όταν $x\longrightarrow +\infty$, ή $x\longrightarrow -\infty$.

2. Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και όταν οι συναρτήσεις f, g δεν ορίζονται στο σημείο x_0.

3. Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, όταν έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

4. Το προηγούμενο θεώρημα εφαρμόζεται ακόμα και όταν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0.

Θεώρημα 2:

Αν για $α\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to α}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to α}g(x)=+\infty$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to α}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε είναι:

$$\lim_{x\to α}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to α}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{4x+2}$.

Λύση: Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, με $f(x)=2x+3$ και g, με $g(x)=4x+2$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. Επομένως έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

(Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο **R** και $f'(x)=2$, $g'(x)=4$). Έτσι είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)'}{(4x+2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα ισχύει και όταν $x\longrightarrow +\infty$ ή $x\longrightarrow -\infty$.

2. Το θεώρημα ισχύει και όταν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ορισμένες στο σημείο x_0.

3. Το θεώρημα εφαρμόζεται ακόμα και όταν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

4. Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, όταν έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Παρατήρηση:

Αν κατά την εφαρμογή των προηγουμένων θεωρημάτων είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=0$ (ή $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=\pm\infty$)

και οι f', g' ικανοποιούν τις υποθέσεις των θεωρημάτων, τότε θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Το ίδιο μπορεί να επαναληφθεί για τις συναρτήσεις f'' και g'', κ.ό.κ.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Λύση: Έστω ότι $f(x)=e^x$ και $g(x)=x^2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. Επομένως το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο **R**, με $f'(x)=e^x$, $g'(x)=2x$. Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Είναι $f''(x)=e^x$ και $g''(x)=2$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Παρατήρηση:

Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, τότε δεν έπεται ότι δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί με τον κανόνα του De l΄ Hospital το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ3x}{1-συν3x}$$

Λύση: Αν $f(x)=ημ3x$, $g(x)=1-συν3x$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=\lim\limits_{x\to0}g(x)$. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο **R**, με $f'(x)=3συν3x$, $g'(x)=3ημ3x$. Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{ημ3x}{1-συν3x}=\lim_{x\to0}\frac{(ημ3x)'}{(1-συν3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{συν3x}{ημ3x}$$

Το $\lim\limits_{x\to0}\frac{συν3x}{ημ3x}$ δεν υπάρχει (διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{συν3x}{ημ3x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{συν3x}{ημ3x}=-\infty$). Αυτό όμως, δεν σημαίνει ότι και το $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημ3x}{1-συν3x}$ δεν υπάρχει. Απλώς το δοσμένο όριο δεν υπολογίζεται με το θεώρημα του De l΄ Hospital.

Παράδειγμα:

Να υπολογισθεί με τον κανόνα του De l΄ Hospital το όριο:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2ημ\frac{1}{x}}{ημx}\quad \text{στο } \mathbb{R}^*$$

Λύση: Έστω $f(x)=x^2ημ\frac{1}{x}$ και $g(x)=ημx$. Τότε είναι $f'(x)=2xημ\frac{1}{x}-συν\frac{1}{x}$ και $g'(x)=συνx$. Τότε: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xημ\frac{1}{x}-συν\frac{1}{x}}{συνx}$. Το όριο αυτό δεν υπάρχει, γιατί δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}συν\frac{1}{x}$.

Όμως:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2ημ\frac{1}{x}}{ημx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{ημ\frac{1}{x}}{1/x}}{\frac{ημx}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

Παρατήρηση:

Πολλές φορές για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης με το θεώρημα του Hospital, κάνουμε διαδοχικές παραγωγίσεις (ν το πλήθος), όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Λύση:

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$. Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^\nu)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\nu x^{\nu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(\nu x^{\nu-1})'}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots2\cdot1}\cdot e^x=\frac{1}{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots2+1}(+\infty)=\frac{1}{\nu!}(+\infty)=+\infty.$$

Παρατήρηση:

Οι άλλες απροσδιόριστες μορφές, πχ. $0(\pm\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$, ανάγονται με κατάλληλες τροποποιήσεις, σε εφαρμογή των προηγούμενων απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, όπως φαίνεται στα επόμενα:

1. Μορφή $0(\pm\infty)$

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ και ότι:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$$

δηλαδή οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Αν υπάρχει περιοχή του x_0, ώστε $g(x)\neq0$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$. Έτσι αναγόμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}(ημx\ln x)$.

Λύση: Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}ημx=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.

Η συνάρτηση $ημx\ln x$, γράφεται:

$$ημx\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{ημx}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(ημx\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{ημx}}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{ημx}=+\infty$, οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$. Είναι:

$$\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{ημx}\right)'}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{συνx}{ημ^2x}}=-\frac{ημ^2x}{xσυνx}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{ημx}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{ημ^2x}{xσυνx}\right)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-ημ^2x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}xσυνx=0$ έχουμε τη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε πάλι το θεώρημα του De l' Hospital. Είναι:

$$(ημ^2x)'=2ημx(ημx)'=2ημxσυνx=ημ2x$$

και: $(xσυνx)'=συνx-xημx$, με $\lim\limits_{x\to 0^+}ημ2x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(συνx-xημx)=1$

Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}(ημx\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{ημx}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{ημx}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-ημ^2x}{xσυνx}\right)=-\lim_{x\to 0^+}\frac{(ημ^2x)'}{(xσυνx)'}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{ημ2x}{συνx-xημx}=0$$

2. Μορφή $(+\infty)-(+\infty)$

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$ και ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, δηλαδή οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$.

α) Τρόπος εργασίας:

Αν υπάρχει περιοχή του x_0, ώστε $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$, τότε θέτουμε $F(x)=\frac{1}{f(x)}$, $h(x)=\frac{1}{g(x)}$, οπότε είναι:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{h(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-F(x)}{h(x)\cdot F(x)}$$

Είναι όμως: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$

και: $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}[h(x)-F(x)]=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}[h(x)F(x)]=0$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{0}{0}$.

β) Τρόπος εργασίας:

Αν υπάρχει περιοχή του x_0, ώστε $f(x)\neq 0$, τότε γράφουμε:

$$f(x)-g(x)=f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Άρα είναι: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]\left[1-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\right]$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ κατά τα γνωστά.

Παραδείγματα:

1. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ημx}\right)$.

Λύση: Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{ημx}=+\infty$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ημx}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx-x}{xημx}\right),\ \text{με}\ \lim_{x\to 0^+}(ημx-x)=0=\lim_{x\to 0^+}(xημx)$$

Οι συναρτήσεις $ημx-x$, $xημx$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Έτσι είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ημx}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(ημx-x)'}{(xημx)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{συνx-1}{ημx+xσυνx} \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(συνx-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(ημx+xσυνx)=0$. Οι συναρτήσεις $συνx-1$, $ημx+xσυνx$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{συνx-1}{ημx+xσυνx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(συνx-1)'}{(ημx+xσυνx)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-ημx}{2συνx-xημx}=0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ημx}\right)=0$.

2. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right]$.

Λύση: Έστω ότι $g(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ και $f(x)=x$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}=+\infty \quad\text{και}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right) \qquad (1)$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)=0$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $(+\infty)0$

Έτσι είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=(\text{απροσδιόριστη μορφή } \tfrac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}(1+0)=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{3}$.

3. Μορφή 0^0 ή $(\pm\infty)^0$ ή $1^{\pm\infty}$

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}$ και είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=0, \quad \lim_{x\to x_o} g(x)=0$$

δηλαδή οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή 0^0.

Έτσι εργαζόμαστε ως εξής. Είναι $f(x)>0$ (εφόσον έχουμε εκθετική συνάρτηση). Έστω:

$$h(x)=[f(x)]^{g(x)} \Longrightarrow h(x)=e^{g(x)\ln f(x)} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} h(x)=e^{\lim_{x\to x_o}[g(x)\ln f(x)]}$$

Αρκεί να βρούμε το όριο του εκθέτη. Είναι όμως $\lim_{x\to x_o} g(x)=0$ και $\lim_{x\to x_o}\ln f(x)=-\infty$, δηλαδή το όριο του εκθέτη είναι της μορφής $0(-\infty)$ (για τη μορφή αυτή η εργασία είναι γνωστή).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το $\lim_{x\to0^+} x^x$.

Λύση: Είναι $\lim_{x\to0^+} x=0$, οπότε οδηγούμαστε στη μορφή 0^0. Είναι:

$$x^x=e^{x\ln x}, \quad \text{με } \lim_{x\to0^+} x^x=e^{\lim_{x\to0^+} x\ln x} \qquad (1)$$

Θα βρούμε το $\lim_{x\to0^+} x\ln x$. Είναι $\lim_{x\to0^+} x=0$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, δηλαδή έχουμε τη μορφή $0(-\infty)$. Είναι:

$$x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad (2)$$

Επειδή $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, οδηγούμαστε από την (2) στη μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$.

Είναι: $\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

Άρα: $$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Έτσι η (1) δίνει $\lim_{x\to0^+} x^x=e^0=1$.

Μεθόδευση:

Με τη βοήθεια των προηγούμενων μπορούμε σχετικά εύκολα, να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών. Ο τρόπος εργασίας φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu=\frac{2^\nu}{\nu^2}$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{2^x}{x^2}$ $(x\neq0)$, της οποίας περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία $\left(\frac{2^\nu}{\nu^2}\right)$.

Η f είναι πηλίκο των $f_1(x)=2^x$ και $f_2(x)=x^2$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε κάθε διάστημα $(\alpha,+\infty)$, με $\alpha>0$ και μάλιστα είναι $\lim_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$. Εξάλλου είναι $f_1'(x)=2^x\ln2$, $f_2'(x)=2x$ και παρατηρούμε ότι είναι επίσης: $\lim_{x\to+\infty}(2^x\ln2)=+\infty=\lim_{x\to+\infty} 2x$.

Οι συναρτήσεις f_1', f_2' είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του $+\infty$, με παραγώγους $f_1''(x)=2^x(\ln2)^2$, $f_2''(x)=2$.

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1''(x)}{f_2''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln2)^2}{2}=+\infty$, θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Επομένως είναι και: $\quad \lim\left(\frac{2^\nu}{\nu^2}\right)=+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1. Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sigma\varphi x}{\pi-2x}$, β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x}$, γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$, δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln\ln(1+x)}$,

ε) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\varepsilon\varphi x+1}{\varepsilon\varphi x}$, στ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$, ζ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x+\ln x}$

Λύση:

α) Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x=0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)=0$. Άρα η εφαρμογή του κανόνα ορίου πηλίκου οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Είναι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\varphi x}{\pi-2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sigma\varphi x)'}{(\pi-2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+\sigma\varphi^2 x)}{-2} = \frac{1}{2}$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu x=0$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{0}{0}$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(x\eta\mu x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu x=0=\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)=0$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{0}{0}$. Είναι επομένως: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\eta\mu x)'}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Από (1) και (2), προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x} = \dfrac{1}{2}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1} \ln x=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{0}{0}$.

Είναι:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\ln(1+x)=-\infty$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $\frac{-\infty}{-\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{[\ln\ln(1+x)]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(x+1)\ln(1+x)}} \qquad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+1)\ln(1+x)}=+\infty$. Έτσι είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(x+1)\ln(1+x)}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[(x+1)\ln(1+x)]'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)+1}{1} = 1 \qquad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 1.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\varepsilon\varphi x+1)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x=+\infty$. Άρα:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\varepsilon\varphi x+1}{\varepsilon\varphi x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\varepsilon\varphi x+1)'}{(\varepsilon\varphi x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 1 = 1$$

στ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

ζ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x\eta\mu x}{2x} \qquad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu x=0$, $\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\eta\mu x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x\eta\mu x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{2} = 0 \qquad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

η) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ln x)=+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x+\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

2. Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2\sigma\varphi x$, β) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\ln x)$, γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)$

Λύση:

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \sigma\varphi x=-\infty$ (μορφή $0(-\infty)$). Επομένως:

$$\lim_{x\to 0^-} x^2\sigma\varphi x = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\varepsilon\varphi x} = (\text{Είναι } \lim_{x\to 0^-} x^2=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^-} \varepsilon\varphi x=0) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2)'}{(\varepsilon\varphi x)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x\to 0^-} 2x\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ (μορφή $0(-\infty)$). Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\eta\mu x} = (\text{Είναι } \lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\eta\mu x}=+\infty) =$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=(\text{είναι }\lim_{x\to0^+}\eta\mu^{[illegible]}x=0,\ \lim_{x\to0^+}x\sigma\upsilon\nu x=0)=-\lim_{x\to0^+}\frac{(\eta\mu^2x)'}{(x\sigma\upsilon\nu x)'}=-\lim_{x\to0^+}\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=0$$

γ) Είναι $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, δηλαδή οδηγούμαστε στη μορφή $(-\infty)0$. Έχουμε:

$$(xe^x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)=(\text{μορφή }\frac{-\infty}{+\infty})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x'}{(e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

3. Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)$, **β)** $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, **γ)** $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

α) Είναι $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ (μορφή $(+\infty)-(+\infty)$). Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1+\sigma\upsilon\nu x}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1+\sigma\upsilon\nu x)'}{[x(1-\sigma\upsilon\nu x)]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}=+\infty$$

β) Είναι $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{xe^x}=+\infty$, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$ (μορφή $(+\infty)-(+\infty)$). Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-xe^x-1}{xe^x(e^x-1)}$$

$\lim_{x\to0^+}(e^x-xe^x-1)=0$, $\lim_{x\to0^+}xe^x(e^x-1)=0$. Άρα:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x-xe^x-1)'}{[xe^x(e^x-1)]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{-xe^x}{e^x(2xe^x+e^x-x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{2xe^x+e^x-x-1}$$

Είναι $\lim_{x\to0^+}(-x)=0$, $\lim_{x\to0^+}(2xe^x+e^x-x-1)=0$. Άρα:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{(-x)'}{(2xe^x+e^x-x-1)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{2e^x+2xe^x+e^x-1}=-\frac{1}{2}$$

γ) Είναι $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to0^+}\ln\frac{1}{x}=+\infty$ (μορφή $(+\infty)-(+\infty)$). Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln1+\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\qquad(1)$$

Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Είναι $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Έτσι εί-

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Έτσι η (1) δίνει:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty(1+0)=+\infty$$

****4. Να υπολογισθούν τα όρια:**

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, **β)** $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$, **γ)** $\lim_{x\to0^+}([illegible]x^2)^{\sigma\varphi x}$,

δ) $\lim_{x\to0^+}(1+\alpha x+\alpha^2x^2)^{\frac{1}{x}}$, $\alpha>0$, **ε)** $\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Λύση:

α) Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ (μορφή $1^{+\infty}$). Έχουμε:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\qquad(1)$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$, το όριο του εκθέτη οδηγεί στη μορφή $(+\infty)0$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=(\text{είναι }\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Έτσι η (1) δίνει: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$

β) Είναι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (μορφή $(+\infty)^0$). Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}\qquad(1)$$

Θα υπολογίσουμε το όριο του εκθέτη. Είναι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ (μορ-

φή $0(+\infty)$). Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$(είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$)$=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Έτσι η (1) δίνει: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\varphi x=+\infty$ (μορφή $1^{+\infty}$). Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}(1+x^2)^{\sigma\varphi x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\varphi x\ln(1+x^2)} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη. Είναι: $\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\varphi x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x^2)=0$ (μορφή $0(+\infty)$). Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}(\sigma\varphi x)\ln(1+x^2)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\varepsilon\varphi x}=(\text{επειδή } \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\varepsilon\varphi x}=\frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{[\ln(1+x^2)]'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\sigma\upsilon\nu^2x}{1+x^2}=0$$

Η (1) δίνει: $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2)^{\sigma\varphi x}=e^0=1$

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\alpha x+\alpha^2x^2)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $1^{+\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}(1+\alpha x+\alpha^2x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln(1+\alpha x+\alpha^2x^2)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x+\alpha^2x^2)} \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε το όριο του εκθέτη. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x+\alpha^2x^2)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x+\alpha^2x^2)}{x}=(\text{μορφή } \frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{[\ln(1+\alpha x+\alpha^2x^2)]'}{x'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha+2\alpha^2x}{1+\alpha x+\alpha^2x^2}=\alpha$$

Έτσι η (1) δίνει $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\alpha x+\alpha^2x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$. Έτσι οδηγούμαστε στη μορφή $1^{-\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)} \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε το όριο του εκθέτη. Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)}{x}=(\text{μορφή } \frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\left[\ln\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)\right]'}{x'}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3^x\ln3+4^x\ln4}{3^x+4^x}\right)=\frac{\ln3+\ln4}{1+1}=\frac{\ln12}{2}=\ln\sqrt{12}$$

Άρα η (2) δίνει: $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt{12}}$

****5. Να υπολογισθούν τα επόμενα όρια:**

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+e^{-x})-x]$, β) $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-e^{-x})\sigma\varphi x$, γ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)$,

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}[x+1+\ln(1+x^2)]$, ε) $\lim\limits_{x\to2^-}(4-x^2)^{2-x}$, στ) $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\sigma\upsilon\nu x)^{\varepsilon\varphi x}$

Λύση:

α) Η μορφή του ορίου είναι $(+\infty)-(+\infty)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^x+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln[e^x(1+e^{-2x})]-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x+\ln(1+e^{-2x})-x]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x+\ln(1+e^{-2x})-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^{-2x})]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right]=$$

$$=[\ln(1+0)]=\ln1=0$$

β) Η απροσδιόριστη μορφή είναι $0(+\infty)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}(e^x-e^{-x})\sigma\varphi x=[0(+\infty)]=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x-e^{-x})\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{[(e^x-e^{-x})\sigma\upsilon\nu x]'}{(\eta\mu x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{[e^x-e^{-x}(-x)']\sigma\upsilon\nu x+(e^x-e^{-x})(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{(1+1)\cdot1+0}{1}=2$$

γ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)=[(\pm\infty)-(\pm\infty)]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=0$$

δ) $$\lim_{x\to-\infty}[x+1+\ln(1+x^2)]=((-\infty)+(+\infty))=\lim_{x\to-\infty}x\left[1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]=-\infty\left[\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]$$

$$=\left[(-\infty)\left[1+0+\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)\right]\right]=(-\infty)\left[1+0-\lim_{x\to-\infty}\frac{[\ln(1+x^2)]'}{(-x)'}\right]$$

$$=(-\infty)\left[1-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'}{-1}\right]=(-\infty)\left[1+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}\right]=(-\infty)(1+0)=-\infty$$

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}(4-x^2)^{2-x}=(0^0)=\lim\limits_{x\to2^-}e^{\ln(4-x^2)^{2-x}}=e^{\lim\limits_{x\to2^-}(2-x)\ln(4-x^2)}$ (1)

Έχουμε $\lim_{x\to 2^-}(2-x)\ln(4-x^2)=0(+\infty)$. Άρα: $\lim_{x\to 2^-}(2-x)\ln(4-x^2)=$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(4-x^2)}{\frac{1}{2-x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{[\ln(4-x^2)]'}{\left(\frac{1}{2-x}\right)'}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{4-x^2}(4-x^2)'}{\frac{1}{(2-x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{4-x^2}(-2x)}{\frac{1}{(2-x)^2}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2+x}(-2x)=0$$

Άρα η (1) δίνει $\lim_{x\to 2^-}(4-x^2)^{2-x}=e^0=1$.

στ) Έχουμε $\lim_{x\to 0^+}(1-συνx)^{εφx}=(0^0)$. Έτσι είναι:

$$f(x)=e^{\ln(1-συνx)^{εφx}} \Longrightarrow f(x)=e^{εφx\ln(1-συνx)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)=e^{\lim_{x\to 0^+}[εφx\ln(1-συνx)]} \qquad (1)$$

Θα βρούμε το όριο του εκθέτη. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}[εφx\ln(1-συνx)]=[0(-\infty)]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-συνx)}{\frac{1}{εφx}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1-συνx)}{\frac{1}{εφx}}=$$

$$=\left[-\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\right]=-\lim_{x\to 0^+}\frac{[-\ln(1-συνx)]'}{\left(\frac{1}{εφx}\right)'}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{1-συνx}ημx}{-\frac{1}{ημ^2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-ημ^3x}{1-συνx}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(-ημ^3x)'}{(1-συνx)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-3ημ^2xσυνx}{ημx}=\lim_{x\to 0^+}(-3ημxσυνx)=0.$$

Η (1) δίνει $\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^0=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

α) Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα 1:

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Τότε:

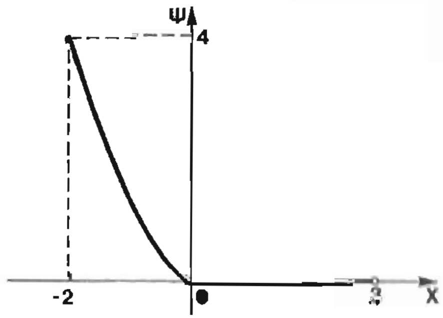
- Αν $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, η f είναι αύξουσα στο Δ και αντίστροφα αν η f είναι αύξουσα στο Δ, τότε $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Αν $f'(x)\leq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, η f είναι φθίνουσα στο Δ και αντίστροφα, αν η f είναι φθίνουσα στο Δ, τότε $f'(x)\leq 0$, για κάθε $x\in\Delta$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \forall x\in(-2,0] \\ 0, & \forall x\in(0,3)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο (-2,3) και είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & \forall x\in(-2,0] \\ 0, & \forall x\in(0,3)\end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in(-2,3)$ είναι $f'(x)\leq 0$. Άρα η f είναι φθίνουσα στο διάστημα (-2,3).

Θεώρημα 2:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι:

- $f'(x)>0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- $f'(x)<0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=2xe^x-3$, ορισμένη στο **R**
'Εχουμε $f'(x)=2e^x+2xe^x=2e^x(x+1)$. Είναι $2e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x+1>0 \iff x>-1$ και $x+1<0 \iff x<-1$. 'Ετσι λοιπόν, έχουμε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(-\infty,-1)$. 'Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$.

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα ισχύει μόνο σε συνεχή υποσύνολα του **R** (διαστήματα).

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\in(-1,0)\cup(0,2)$. Είναι $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,2)$. Η f όμως, δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση $(-1,0)\cup(0,2)$, εφόσον η ένωση δεν είναι συνεχές υποσύνολο του **R**. Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη μονοτονία χωριστά στα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,2)$. 'Ετσι είναι f↘ στο $(-1,0)$ και f↘ στο $(0,2)$.

2. Το αντίστροφο του προηγουμενου θεωρήματος δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την f, με τύπο $f(x)=x^3+1$, που είναι ορισμένη στο $(-1,1)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$, με $x_1<x_2 \Longrightarrow x_1^3<x_2^3 \Longrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,1)$. 'Εχουμε ακόμα $f'(x)=3x^2$, για κάθε $x\in(-1,1)$, αλλά η f' δεν είναι θετική για κάθε $x\in(-1,1)$, εφόσον $f'(0)=0$.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x)\geq 0$ (ή $f'(x)\leq 0$), $\forall x\in\Delta$ και η ισότητα ισχύει μόνο σε μεμονωμένα σημεία (μπορεί και άπειρα το πλήθος), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα Δ.

   Για να είναι η f αύξουσα (ή φθίνουσα), πρέπει να είναι $f'(x)\geq 0$ (ή $f'(x)\leq 0$), $\forall x\in\Delta$ και σε ένα υποδιάστημα του Δ η f' να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν.

Παράδειγμα:

Η f με $f(x)=x+\eta\mu x$ είναι ορισμένη στο **R**. Είναι $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x\geq 0$, με:

$$f'(x)=0 \iff \sigma\upsilon\nu x=-1 \iff x=(2\kappa\pi+1)\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Η f' μηδενίζεται σε άπειρα μεμονωμένα σημεία, αλλά δεν υπάρχει διάστημα $(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$, που να είναι $f'(x)=0$, άρα η f είναι ↗ στο **R**.

β) Ακρότατα συνάρτησης

Θεώρημα 1:

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και ότι στο $x_o\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_o)=0$. Η f παρουσιάζει στο x_o:

1. τοπικό μέγιστο το $f(x_o)$, αν
   $\forall x\in(\alpha,x_o]$, $f'(x)\geq 0$ και $\forall x\in[x_o,\beta)$, $f'(x)\leq 0$
2. τοπικό ελάχιστο το $f(x_o)$, αν
   $\forall x\in(\alpha,x_o]$, $f'(x)\leq 0$ και $\forall x\in[x_o,\beta)$, $f'(x)\geq 0$

Παρατήρηση: Τα ολικά ακρότατα είναι και τοπικά. Επομένως είναι σωστός ο χαρακτηρισμός όλων των ακροτάτων σαν τοπικά.

Για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπέρασμα αν ένα τοπικό ακρότατο είναι ολικό, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και άλλα στοιχεία της συνάρτησης (μονοτονία, διάγραμμα).

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0)$. Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$. Ρίζα της $f'(x)=0$ είναι το σημείο $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

   I) 'Εστω $\alpha>0$, τότε το πρόσημο της f' είναι:

$-\infty$		$-\beta/2\alpha$		$+\infty$
	−	•	+	

   Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}$, που είναι το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.

   Το τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό, διότι f↘ στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και f↗ στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

   II) 'Εστω $\alpha<0$, τότε το πρόσημο της f' είναι:

$-\infty$		$-\beta/2\alpha$		$+\infty$
	+	•	−	

   Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}$, που είναι το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.

   Το τοπικό μέγιστο είναι και ολικό, διότι f↗ στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και f↘ στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^3-x$, ορισμένη στο **R**. Είναι:

$$f'(x)=3x^2-1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι ρίζες της f' είναι οι $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Το πρόσημο του f'(x) είναι:

$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
	+		-		+	

Επομένως η f παρουσιάζει στο $x_o=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και στο $x_o=\frac{1}{\sqrt{3}}$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα ισχύει ακόμα και όταν δεν υπάρχει η $f'(x_o)$ (το σημείο x_o μπορεί και να μην είναι ρίζα της f'), αρκεί όμως το x_o να ανήκει στο διάστημα που είναι ορισμένη η f.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=1+(x+2)^{\frac{4}{5}}$, ορισμένη στο διάστημα [-3,-1]. Είναι $f'(x)=\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}(x+2)^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}\,\frac{1}{(x+2)^{\frac{1}{5}}}$. Η f' δεν έχει ρίζες και είναι ορισμένη στο [-3,-2) U (-2,-1]. Το πρόσημο της f' είναι:

-3		-2		-1
	-		+	

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο -2, το -2 ανήκει στο [-3,-1] και η παράγωγος της f αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του -2. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -2, που είναι το:

$$f(-2)=1+(-2+2)^{\frac{4}{5}}=1$$

Πράγματι είναι $f(-2)\le f(x)$, για κάθε $x\in[-3,-1]$.

2. Αν το σημείο x_o είναι ρίζα της f' (ή αν δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο x_o) και "εκατέρωθεν" του x_o η f αλλάζει πρόσημο, αλλά το x_o δεν ανήκει στο διάστημα που είναι ορισμένη η f, το θεώρημα δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την f, με $f(x)=\ln(x^3-3x+2)$. Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατά της. Θα βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού της f. Πρέπει να είναι:

$$x^3-3x+2>0 \quad (1)$$

Το πολυώνυμο $\varphi(x)=x^3-3x+2$ έχει ρίζες $\rho_1=1$, $\rho_2=1$, $\rho_3=-2$. Το πρόσημο του φ(x) είναι:

$-\infty$		-2		1		$+\infty$
	-		+		+	

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(-2,1)\cup(1,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{x^3-3x+2}(x^3-3x+2)'=\frac{3x^2-3}{x^3-3x+2}$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή, εφόσον είναι $x^3-3x+2>0$, για κάθε $x\in A$. Σχετικά με το πρόσημο της f' έχουμε:

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	+		-		+	

Επειδή το πεδίο ορισμού της f' είναι το $A_1=(-2,1)\cup(1,+\infty)$, έχουμε για την f' ότι:

-2		-1		1		$+\infty$
	+		-		+	

Στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, διότι είναι ρίζα της f: "εκατέρωθεν" του -1 η f' αλλάζει πρόσημο και $-1\in A$. Στο σημείο 1 δεν υπάρχει παράγωγος της f'. "Εκατέρωθεν" του 1 η f' αλλάζει πρόσημο, δεν είναι όμως, το σημείο αυτό θέση ακροτάτου, διότι $1\notin A$.

Θεώρημα 2:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_o\in\Delta$ είναι $f'(x_o)=0$.

1. Αν $f''(x_o)>0$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
2. Αν $f''(x_o)<0$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=xe^x-1$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x(x+1)$ και $f''(x)=e^x(x+2)$. Ρίζα της f' είναι το σημείο $x_o=-1$. Έχουμε $f''(-1)=e^{-1}(-1+2)=\frac{1}{e}>0$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_o=-1$, που είναι το $f(-1)=-1e^{-1}-1=-\frac{1}{e}-1$.

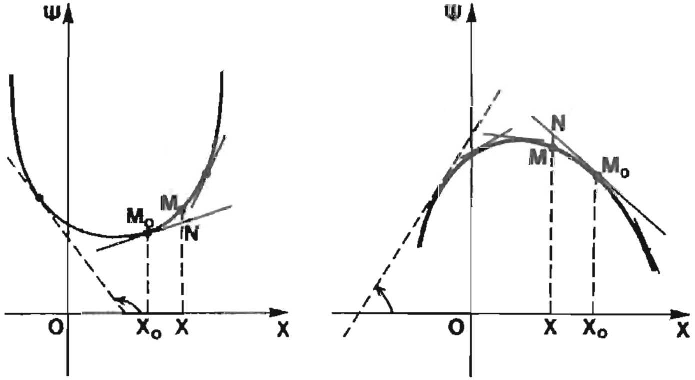
Παρατήρηση: Αν $f''(x_o)=0$, δηλαδή αν η ρίζα της f' είναι και ρίζα της f'' τότε το θεώρημα γενικεύεται. Δηλαδή βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη, παράγωγο για $x=x_o$. Έστω ότι $f^{(\nu)}(x_o)\neq0$. Αν ο ν είναι περιττός, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_o. Αν ο ν είναι άρτιος και $f^{(\nu)}(x_o)>0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο. Αν $f^{(\nu)}(x_o)<0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο.

γ) Κυρτές συναρτήσεις

Γενικά:

Θεωρούμε μια συνάρτηση f, που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ, τότε:

• Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geq 0$, τότε η παράγωγος συνάρτηση f΄ είναι αύξουσα στο Δ και αντιστρόφως. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x αυξάνει στο Δ, ο αντίστοιχος συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο σημείο $M(x,f(x))$ αυξάνει επίσης (1ο σχήμα). Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι η γραφική παράσταση της f είναι "πάνω" από την εφαπτομένη σ΄ οποιοδήποτε σημείο της. Λέμε τότε ότι η f "στρέφει τα κοίλα άνω" στο διάστημα Δ (ή ότι η f είναι "κυρτή" στο Δ).

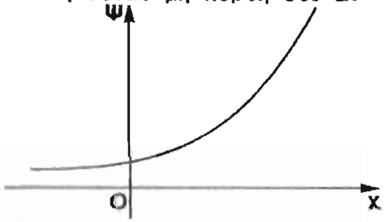


• Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leq 0$, με ανάλογους συλλογισμούς καταλήγουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι "κάτω" από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της (δεύτερο σχήμα). Λέμε τότε ότι η f "στρέφει τα κοίλα κάτω" στο διάστημα Δ (ή ότι η f είναι "κοίλη" στο Δ). Έτσι έχουμε τα συμπεράσματα:

1. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $\mathbf{f''(x) \geq 0}$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης **f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ** ή είναι κυρτή στο Δ.

2. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $\mathbf{f''(x) \leq 0}$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης **f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ** ή είναι μη κυρτή στο Δ.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^x$, που είναι ορισμένη στο **R**. Είναι $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$, για κάθε $x \in$ **R**. Επομένως η f στρέφει τα κοίλα άνω στο **R** (Βλέπε διπλανό σχήμα).



Παρατήρηση:

Ισχύει και ο επόμενος ορισμός σχετικά με τις κυρτές ή μη κυρτές συναρτήσεις:

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β):

i) Αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), τότε λέμε ότι η f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), τότε λέμε ότι η f είναι **μη κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο $[\alpha,\beta]$.

Πρόταση:

> Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β):
>
> i) Αν $f''(x)>0$ στο (α,β), τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[\alpha,\beta]$.
>
> ii) Αν $f''(x)<0$ στο (α,β), τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα:

Να προσδιοριστούν τα διαστήματα, στα οποία η $f(x)=\eta\mu x$ είναι κυρτή ή μη κυρτή.

Λύση:

Έχουμε $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ και $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

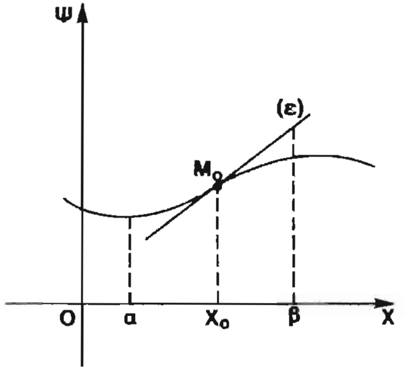
Στο διάστημα $(0,\pi)$ είναι $f''(x)<0$ και στο διάστημα $(\pi,2\pi)$ είναι $f''(x)>0$.

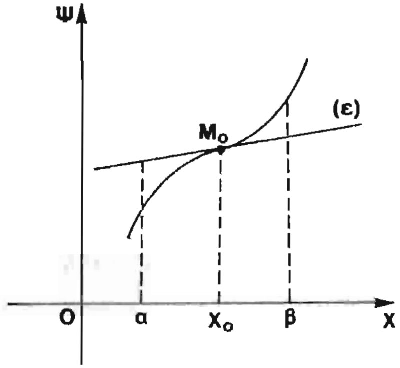
Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,\pi)$ και άνω στο $(\pi,2\pi)$.

(Μελετούμε την κυρτότητα της f στο διάστημα $[0,2\pi]$ μόνο, διότι η f είναι περιοδική, με περίοδο 2π).

δ) Σημεία καμπής

Θεωρούμε μια συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β). Υποθέτουμε ότι ορίζεται η δεύτερη παράγωγος f'' της f στο διάστημα (α,β) και μηδενίζεται στο σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$, ενώ σ' ένα από τα διαστήματα (α,x_o), (x_o,β) έχει τιμές θετικές και στο άλλο αρνητικές. Τότε η γραφική παράσταση της





f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(\alpha,x_o]$ και κάτω στο $[x_o,\beta)$ (πρώτο σχήμα) ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(\alpha,x_o]$ και άνω στο $[x_o,\beta)$ (δεύτερο σχήμα).

Αυτό, και στις δυο περιπτώσεις, σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται "εκατέρωθεν" της εφαπτομένης της στο σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$. Μ' άλλα λόγια η εφαπτομένη στο M_o "διαπερνά" τη γραφική παράσταση της f. Στην περίπτωση αυτή το σημείο M_o λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f. Λέμε ακόμη ότι η f παρουσιάζει **καμπή στο x_o**.

> Έτσι λοιπόν αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$, αλλάζοντας πρόσημο, τότε το διάγραμμα της f παρουσιάζει καμπή στο x_o. Το σημείο καμπής είναι το $M_o(x_o,f(x_o))$*.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^3$, ορισμένη στο **R**. Είναι:

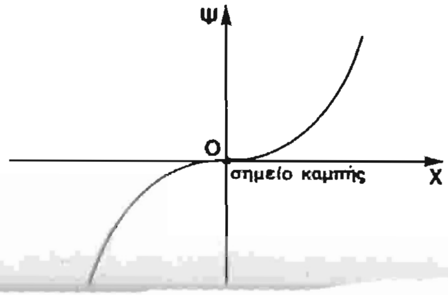
$$f'(x)=3x^2 \quad \text{και} \quad f''(x)=6x$$

Ρίζα της f'' είναι το σημείο $x_o=0$. Το πρόσημο της f''(x) είναι:



Επειδή η f'' "εκατέρωθεν" του x_o αλλάζει πρόσημο η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=0$. Το σημείο καμπής είναι το σημείο:

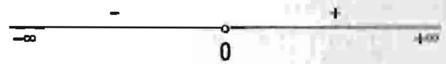
$M_o(x_o,f(x_o)) = M_o(0,f(0)) = M_o(0,0)$



Παρατηρήσεις:

1. Αν η f'' "εκατέρωθεν" ενός σημείου x_o αλλάζει πρόσημο και το x_o δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δεν έπεται ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_o.

Παράδειγμα: Η f με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι ορισμένη στο R*, με $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, για κάθε $x \in R^*$. Το πρόσημο της f'' είναι:

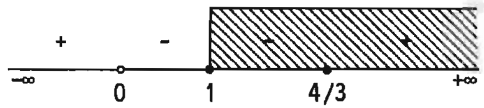


Παρατηρούμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο "εκατέρωθεν" του σημείου $x_o=0$. Στο σημείο όμως αυτό η f δεν παρουσιάζει καμπή, διότι το $x_o=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

2. Αν το σημείο x_o ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και δεν υπάρχει η $f''(x_o)$, ενώ η f'' αλλάζει πρόσημο "εκατέρωθεν" του x_o, τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_o.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f, με $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}+x+3$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,1]$ με $f''(x)=\dfrac{x^3(3x-4)}{4(x^2-x^3)\sqrt{x^2-x^3}}$. Η f'' είναι ορισμένη στο $(-\infty,0)\cup(0,1)$ (Η f'' δεν ορίζεται στο σημείο $x_o=0$), διότι:

$$\text{προσ}f''(x)=\text{προσ}\,\frac{x^3(3x-4)}{4(x^2-x^3)\sqrt{x^2-x^3}}=\text{προσ}x^3(3x-4)=\text{προσ}x(3x-4):$$



Η f δεν ορίζεται

Επειδή $0 \in (-\infty,1]$ και εκατέρωθεν του η f'' αλλάζει πρόσημο, η f παρουσιάζει στο $x_o=0$ καμπή. Το σημείο καμπής είναι $M_o(0,f(0))=M_o(0,3)$.

3. Είναι δυνατόν να είναι $f''(x_o)=0$, χωρίς το σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$ να είναι σημείο καμπής.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(x-1)^4$. Είναι $f'(x)=4(x-1)^3$ $f''(x)=12(x-1)^2$. Ρίζα της f'' είναι το σημείο 1. Επειδή είναι:

$$f''(x)=12(x-1)^2 \geq 0, \quad x \in R$$

(δηλαδή η f'' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1), η f δεν παρουσιάζει καμπή στο 1.

Μελέτη συνάρτησης

Γενικά:

Όταν λέμε να μελετηθεί μια συνάρτηση, εννοούμε να βρούμε όλα τα στοιχεία της και όλα τα χαρακτηριστικά της. Συγκεκριμένα να βρούμε:

α) το πεδίο ορισμού της

β) να εξετάσουμε αν είναι περιοδική* ή άρτια* ή περιττή*

γ) να εξετάσουμε αν είναι συνεχής

δ) να βρούμε τη μονοτονία και τα πιθανά ακρότατά της

ε) να βρούμε πώς στρέφει τα κοίλα και τα πιθανά σημεία καμπής

στ) να βρούμε τις ασύμπτωτες*, αν υπάρχουν

ζ) να χαράξουμε το διάγραμμά της

η) Να βρούμε το σύνολο τιμών της

Παρατηρήσεις:

1. Η μελέτη μιας συνάρτησης f αρχίζει με τον προσδιορισμό του **πεδίου ορισμού** της Α. Υπάρχει περίπτωση η μελέτη να περιοριστεί σ' ένα υποσύνολο του Α. Έτσι αν η συνάρτηση f είναι:

- περιοδική, με περίοδο Τ, τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σ' ένα διάστημα της μορφής $[\alpha,\alpha+T)$, δηλαδή σ' ένα διάστημα μιας περιόδου της.
- άρτια ή περιττή, αρκεί να τη μελετήσουμε στο $R_+ \cap A$. Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ ή κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο.(ανάλογα αν είναι άρτια ή περιττή).

2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής και ειδικότερα παραγωγίσιμη.

3. Το πεδίο ορισμού Α είναι γενικά διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Εξετάζουμε λοιπόν, τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το Α, ιδιαίτερα, όταν τα σημεία αυτά είναι σημεία ασυνέχειας ή το $+\infty$ ή το $-\infty$.

4. Υπολογίζουμε την παράγωγο f' της f και εξετάζουμε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής x. Έτσι προκύπτουν τα διάφορα διαστήματα μονοτονίας της f, καθώς και τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ενδεχομένως παρουσιάζει ακρότατα.

5. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f''. Από τη μελέτη του προσήμου της ορίζονται τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, καθώς και ενδεχόμενα σημεία καμπής.

6. Άλλα συμπληρωματικά στοιχεία της μελέτης μιας συνάρτησης είναι:

- ο προσδιορισμός των ασυμπτώτων (που γίνεται όπως είδαμε στο κεφάλαιο των ορίων).
- Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες, δηλαδή υπολογίζουμε το f(0) και τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Με τα στοιχεία που θα συγκεντρώσουμε από την προηγούμενη μελέτη, καταρτίζουμε πίνακα ο οποίος μας βοηθάει στη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

* Η σχετική μελέτη έγινε στον α' τόμο, σελίδα 62.

Παράδειγμα: Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με:

$$f(x)=2x^3+x^2-7x-6$$

Λύση:

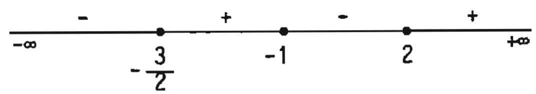
α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το **R**.

β) Η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή ούτε περιοδική.

γ) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R** και:

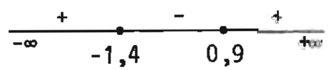
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

δ) **Ρίζες και πρόσημο της f:** Η $f(x)=0$ έχει ρίζες $-\frac{3}{2}$, -1 και 2. Είναι



Στα διαστήματα που είναι $f(x)>0$, το διάγραμμα της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x. Στα διαστήματα που είναι $f(x)<0$, το διάγραμμα της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x. Στα σημεία $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-1$, $x_3=2$ (ρίζες της $f(x)=0$), το διάγραμμα της f συναντά τον άξονα x'x. Στο σημείο $f(0)=-6$ η f συναντά τον άξονα ψ'ψ.

ε) **Ρίζες και πρόσημο της f':** Είναι $f'(x)=6x^2+2x-7$. Η $f'(x)=0$ έχει ρίζες (κατά προσέγγιση) -1,4 και 0,9. Το πρόσημο της f' είναι:



Έτσι έχουμε f$\uparrow$ στο $(-\infty,-1{,}4)$, f$\downarrow$ στο $(-1{,}4\ ,\ 0{,}9)$ και f$\uparrow$ στο $(0{,}9\ ,\ +\infty)$. Η f παρουσιάζει στο σημείο $x_1=-1{,}4$ τοπικό μέγιστο το $f(-1{,}4)=0{,}4$ και στο σημείο $x_2=0{,}9$ τοπικό ελάχιστο το $f(0{,}9)=-10{,}4$.

στ) **Ρίζες και πρόσημο της f'':** Είναι $f''(x)=2(6x+1)$. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ρίζα το -1/6. Το πρόσημο της f'' είναι:

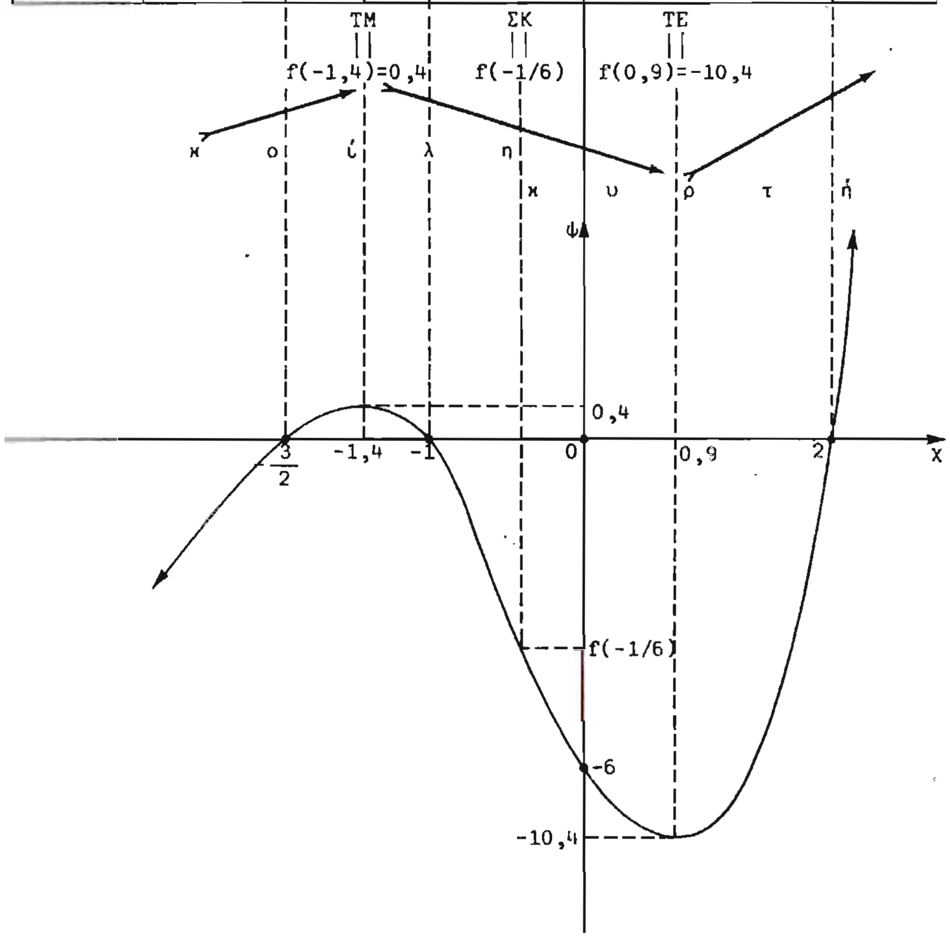


Επομένως η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (-∞,-1/6) και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (-1/6,+∞). Στο σημείο x_o=-1/6 η f παρουσιάζει καμπή. Το σημείο καμπής είναι το σημείο M_o(-1/6,f(-1/6)).

ζ) Η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, άρα το διάγραμμά της δεν έχει ασύμπτωτες.

η) Με τη βοήθεια των προηγουμένων στοιχείων καταρτίζουμε τον επόμενο πίνακα, που μας βοηθά στη χάραξη του διαγράμματος της f.

x	-∞		-3/2		-1,4		-1		-1/6		0		0,9		2		+∞
f(x)		-	0	+		+	0	-		-		-		-	0	+	
f'(x)		+		+	0	-		-		-		-	0	+		+	
f''(x)		-		-		-		-	0	+		+		+		+	



θ) Η προβολή του διαγράμματος της f στον άξονα ψ'ψ δίνει το σύνολο R που είναι και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Διάφορες μεθοδεύσεις

1. Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία εργαζόμαστε ως εξής:
α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.
β) Σχηματίζουμε την f' και βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.
γ) Υπολογίζουμε το πρόσημο της f' και εφαρμόζουμε τα σχετικά συμπεράσματα.

Παραδείγματα:

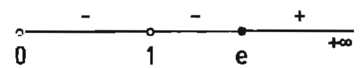
1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι το A=(0,1) U (1,+∞) (πρέπει x>0 και lnx≠0 ⟺ x≠1). Είναι $f'(x)=\frac{x'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-x(1/x)}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

Πεδίο ορισμού της f' είναι το (0,1) U (1,+∞). Έστω:

$$f'(x)>0 \iff \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}>0 \iff \ln x-1>0 \iff \ln x>1 \iff \ln x>\ln e \iff x>e$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι f'(x)<0 ⟺ x<e. Έτσι το πρόσημο της f' είναι:

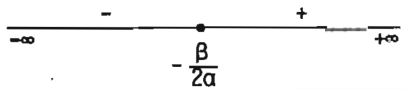


Επομένως έχουμε f↓ στο (0,1), f↓ στο (1,e) και f↑ στο (e,+∞).

2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f, με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, α,β,γ ∈ R α≠0.

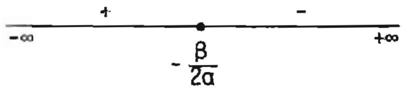
Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το **R**. Είναι f'(x)=2αx+β, ∀x ∈ **R**.

1) Έστω α>0, τότε το πρόσημο της f' είναι:



Άρα η f είναι ↓ στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και f↑ στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

2) Έστω α<0, τότε το πρόσημο της f' είναι:



Άρα η f είναι ↑ στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και f↓ στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

Παρατήρηση: Αν ο προσδιορισμός του προσήμου της f΄ είναι δύσκολος, τότε μπορούμε να εργαστούμε για ορισμένες μορφές συναρτήσεων ως εξής:

Σχηματίζουμε τις διαδοχικές παραγώγους f'', f''', $f^{(\kappa)}$, κοκ. έως ότου φτάσουμε σε μια παράγωγο της οποίας το πρόσημο προσδιορίζεται εύκολα. Έστω ότι έχουμε προσδιορίσει το πρόσημο της κ τάξεως παραγώγου. Τότε είναι γνωστή η μονοτονία της $f^{(\kappa-1)}$. Από τη μονοτονία της $f^{(\kappa-1)}$ βρίσκουμε το πρόσημό της. Επειδή είναι γνωστό το πρόσημο της $f^{(\kappa-1)}$ είναι γνωστή η μονοτονία της $f^{(\kappa-2)}$. Από τη μονοτονία της $f^{(\kappa-2)}$ βρίσκουμε το πρόσημό της κοκ. Έτσι φτάνουμε στη μονοτονία (άρα και στο πρόσημο της f΄).

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης f, με $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, αν $x\le 0$.

Λύση: Είναι $f'(x)=e^x-1-x$. Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου είναι δύσκολο να προσδιοριστεί, γι αυτό σχηματίζουμε την f''. Είναι $f''(x)=e^x-1$. Σχηματίζουμε και την f'''. Είναι $f'''(x)=e^x$, με $e^x>0$, $\forall x\in(-\infty,0]$. Επειδή $f'''(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$, είναι f''↑ στο $(-\infty,0]$. Άρα:

$$x<0 \Longrightarrow f''(x)<f''(0) \Longleftrightarrow f''(x)<0$$

Επειδή $f''(x)<0$ στο $(-\infty,0]$, είναι f΄↓ στο $(-\infty,0]$. Άρα:

$$x<0 \Longrightarrow f'(x)>f'(0) \Longleftrightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(-\infty,0]$$

> 2. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων μονοτονίας μπορούμε να δείχνουμε διάφορες μόνιμες ανισότητες. Ο τρόπος εργασίας φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι $1-\frac{1}{x}\le \ln x$ (1), $\forall x>0$.

Απόδειξη: Η (1) γράφεται ισοδύναμα $\ln x+\frac{1}{x}-1\ge 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$, ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2} \quad (2)$$

α) Έστω $x\in(0,1)$. Είναι $x<1 \Longleftrightarrow x-1<0$. Άρα η (2) δίνει:

$$f'(x)<0,\quad \forall x\in(0,1)$$

Έτσι είναι f↓ στο $(0,1)$. Άρα για:

$$x<1 \Longrightarrow f(x)>f(1) \Longleftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1>\ln 1+\frac{1}{1}-1 \Longleftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1>0$$

β) Έστω ότι $x\in(1,+\infty)$. Είναι $1<x \Longleftrightarrow x-1>0$. Η (2) δίνει:

$$f'(x)>0,\ \forall x\in(1,+\infty)$$

Έτσι είναι f↑ στο $(1,+\infty)$. Άρα για:

$$1<x \Longrightarrow f(1)<f(x) \Longleftrightarrow 0<\ln x+\frac{1}{x}-1$$

γ) Αν $x=1$, η (1) ισχύει σαν ισότητα.

2. Να δειχθεί ότι $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$ (1), $x>0$.

Απόδειξη: Η (1) γράφεται ισοδύναμα $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, με πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=e^0-1=0$ και ακόμα ότι $f'(x)=e^x-1-x$. Επειδή ισχύει η ανισότητα $e^x\ge 1+x$, $\forall x\in(0,+\infty)$ θα είναι και $e^x-1-x>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, δηλαδή $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Άρα η f είναι ↑ στο $[0,+\infty)$, οπότε για:

$$0<x \Longrightarrow f(0)<f(x) \Longleftrightarrow 0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0 \Longleftrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

> **3.** Με τη βοήθεια των θεωρημάτων μονοτονίας μπορούμε να:
>
> **α) Επιλύουμε εξισώσεις:** Στηριζόμαστε στο γεγονός ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη είναι "1-1". Έτσι είναι:
>
> $$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$
>
> και επειδή για κάθε συνάρτηση ισχύει $x_1=x_2 \Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)=f(x_2) \Longleftrightarrow x_1=x_2$. Με τη βοήθεια της ισοδυναμίας αυτής επιλύουμε εξισώσεις.
>
> **β) Επιλύουμε ανισώσεις:** Στηριζόμαστε στο ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)>f(x_2) \Longleftrightarrow x_1>x_2$.
>
> Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)>f(x_2) \Longleftrightarrow x_1<x_2$.

Παραδείγματα:

****1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f, με $f(x)=e^x+x^3$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2-1}-e^{3x^2-9}=-(x^2-1)^3+(3x^2-9)^3$ (1).**

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=e^x+3x^2$. Επειδή $e^x>0$, $\forall x$ R, $3x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, θα είναι $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R**.

β) Η (1) γράφεται:

$$e^{x^2-1}+(x^2-1)^3=e^{3x^2-9}+(3x^2-9)^3 \iff f(x^2-1)=f(3x^2-9)$$

Η f είναι συνάρτηση και "1-1". Επομένως ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x^2-1)=f(3x^2-9) \iff x^2-1=3x^2-9 \iff -2x^2=-8 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$$

** 2. **Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f, με τύπο:**

$$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $(3^{x-1}+4^{x-1})5^{1-2x}<(3^{1-2x}+4^{1-2x})5^{x-1}$ (1)

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]'+\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x\right]'$. Έστω:

$$h(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x \implies \ln h(x)=x\ln\frac{3}{5} \implies \frac{h'(x)}{h(x)}=\ln\frac{3}{5} \iff h'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}$$

Άρα: $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]'=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}$

Όμοια βρίσκουμε ότι $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x\right]'=\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}$

Έτσι είναι $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in\mathbf{R}$

(διότι $\left(\frac{3}{5}\right)^x>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^x>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $\ln\frac{3}{5}<0$ και $\ln\frac{4}{5}<0$).

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο **R**.

β) Η (1) γράφεται:

$$\frac{3^{x-1}+4^{x-1}}{5^{x-1}}<\frac{3^{1-2x}+4^{1-2x}}{5^{1-2x}} \iff \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} \iff$$

$$\iff f(x-1)<f(1-2x) \quad (2)$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει η (2), θα ισχύει η ισοδυναμία: $f(x-1)<f(1-2x) \iff x-1>1-2x \iff 3x>2 \iff x>\frac{2}{3}$.

> **4.** Με τη βοήθεια των Θεωρημάτων μονοτονίας μπορούμε να δείχνουμε ότι
> α) Μια εξίσωση έχει μια ρίζα πραγματική το πολύ σ' ένα διάστημα.
> β) Μια ακριβώς ρίζα πραγματική σ' ένα διάστημα.

> Στην πρώτη περίπτωση σχηματίζουμε τη συνάρτηση f με τύπο το πρώτο μέλος της εξίσωσης (το άλλο μέλος είναι μηδέν) και δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής και γνήσια μονότονη.
> Στη δεύτερη περίπτωση δείχνουμε ακόμα ότι η f παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3+2\alpha x+\beta=0$, με $\alpha>0$, $\beta\in\mathbf{R}$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=4x^3+2\alpha x+\beta$. Η f είναι συνεχής στο **R**. Είναι $f'(x)=12x^2+2\alpha>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R**. Επομένως η εξίσωση $4x^3+2\alpha x+\beta=0$ έχει μια το πολύ ρίζα πραγματική.

*** 2. **Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x+1+\ln(1+x^2)=0$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική.**

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=x+1+\ln(1+x^2)$, που είναι ορισμένη και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=1+\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=1+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}>0$$

για κάθε $x\in\mathbf{R}-\{-1\}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R**. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f. Επειδή η f είναι συνεχής και τα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι $\pm\infty$, το σύνολο τιμών της f θα έχει ακρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (και θα περιέχει όλους τους αριθμούς που περιλαμβάνονται στα άκρα αυτά). Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[1+x+\ln(1+x^2)]=\lim_{x\to+\infty}(1+x)+\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

και:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[1+x+\ln(1+x^2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)=[(-\infty)+(+\infty)$ απροσδιόριστη μορφή]. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[\frac{1}{x}+1+\ln\frac{(1+x^2)}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}x\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+1+\ln\frac{(1+x^2)}{x}\right]=$$

$$=(-\infty)\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]=(-\infty)\left[0+1+\lim_{x\to-\infty}\frac{[\ln(1+x^2)]'}{x'}\right]=$$

$$=(-\infty)\left[1+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(1+x^2)}\right]=(-\infty)(1+0)=-\infty$$

Επομένως είναι $f(A)=(-\infty,+\infty)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f περιέχει

αρνητικές και θετικές τιμές. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η εξίσωση: $1+x+\ln(1+x^2)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα.

****3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(e^x-e^{-x})x-(e^x+e^{-x})=0$ έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες.**

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=(e^x-e^{-x})x-(e^x+e^{-x})$, που είναι ορισμένη και συνεχής στο **R**. Έχουμε $f'(x)=x(e^x+e^{-x})$.

Αν $x>0$, τότε $f'(x)>0$, οπότε η f είναι ↑ στο $(0,+\infty)$. Ισχύει ακόμα ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$ και:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(e^x-e^{-x})x-(e^x+e^{-x})\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x-1}{x+1}e^x-e^{-x}\right]=(+\infty)\left[1(+\infty)-0\right]=+\infty$$

Άρα $x\in(0,+\infty) \Longrightarrow f(x)\in[-2,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το διάγραμμα της f θα συναντά τον άξονα των $x'x$ σ' ένα ακριβώς σημείο, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

****4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση συνx-x=0 έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.**

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\text{συν}x-x$. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $(0,\pi/2)$. Είναι:

$$f'(x)=-\text{ημ}x-1=-(\text{ημ}x+1)<0,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα δτο διάστημα $(0,\pi/2)$.

Το σύνολο τιμών της f έχει άκρα $f(0)=1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, άρα:

$$f(A)=\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$$

Παρατηρούμε ότι το f(A) περιέχει αρνητικές και θετικές τιμές. Επειδή η f στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και το σύνολο τιμών της περιέχει αρνητικές και θετικές τιμές, το διάγραμμά της στο $(0,\pi/2)$ συναντά τον άξονα $x'x$ σ' ένα και μόνο σημείο.

Άρα η εξίσωση συνx-x=0 έχει μια μόνο ρίζα πραγματική στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης, με το πρώτο θεώρημα, θα εργαζόμαστε ως εξής:

α) θα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

β) θα σχηματίζουμε την f' και θα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.

γ) θα βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Αν x_0 είναι μια ρίζα της (με $x_0\in A$) και "εκατέρωθεν" της η f' αλλάζει πρόσημο, τότε για $x=x_0$, η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το $f(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν η f' δεν αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά της ρίζας x_0, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (το x_0 δεν είναι θέση ακροτάτου).

2. Αν η f' είναι μόνιμα θετική ή μόνιμα αρνητική, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

3. Αν σε ένα σημείο x_0 δεν υπάρχει η παράγωγος (δηλαδή αν δεν υπάρχει η $f'(x_0)$), αλλά εκατέρωθεν του x_0 η f' αλλάζει πρόσημο, τότε το x_0 είναι θέση ακρότατου (με την προϋπόθεση ότι το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης).

Παραδείγματα:

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\in(-\infty,1] \\ x, & \text{αν } x\in[1,+\infty)\end{cases}$

Λύση: Επειδή αριστερά και δεξιά του 1 η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικούς τύπους, για να βρούμε την παράγωγο της f στο σημείο 1, θα βρούμε τις $f'_\delta(1)$ και $f'_\alpha(1)$. Έχουμε:

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$f'_\alpha(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

Επειδή $f'_\delta(1)\neq f'_\alpha(1)$, δεν υπάρχει η $f'(1)$. Επομένως έχουμε:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & \text{αν } x\in(-\infty,1) \\ 1, & \text{αν } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Ρίζα της $f'(x)=0$ είναι το σημείο $x_0=0$. Θα εξετάσουμε αν η f έχει ακρότατα στο σημείο 0 (ρίζα της πρώτης παραγώγου) και στο σημείο 1 (σημείο στο οποίο δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος).

Το πρόσημο της f' είναι:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		−		+		+	

Επομένως η f παρουσιάζει στο σημείο 0 τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$. Στο σημείο 1 η f δεν παρουσιάζει ακρότατο, διότι αριστερά και δεξιά του, η f' είναι θετική.

2. Να βρεθούν τα ακρότατα της f, με $f(x)=e^x+2$.

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι το R. 'Εχουμε:

$$f'(x)=(e^x+2)'=e^x>0, \quad \forall x \in R$$

'Αρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

6. Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης f, με το δεύτερο θεώρημα, θα εργαζόμαστε ως εξής:

α) Θα βρίσκουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Θα βρίσκουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου από την εξίσωση:

$$f'(x)=0$$

γ) Τις ρίζες αυτές θα αντικαθιστούμε στη δεύτερη παράγωγο. Αν η δεύτερη παράγωγος για τη ρίζα $x=x_o$, πχ. δώσει αριθμό θετικό, τότε για $x=x_o$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, που είναι το $f(x_o)$. Αν για $x=x_o$ η δεύτερη παράγωγος δώσει αριθμό αρνητικό, τότε για $x=x_o$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, που είναι το $f(x_o)$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν η δεύτερη παράγωγος είναι σταθερή και θετική, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ αν είναι σταθερή και αρνητική η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

2. Αν η πρώτη παράγωγος είναι μόνιμα θετική, ή μόνιμα αρνητική (δηλαδή δεν έχει ρίζες πραγματικές), τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

3. Αν μια ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι και ρίζα της δεύτερης παραγώγου, δηλαδή αν έχουμε $f'(x_o)=0$ και $f''(x_o)=0$, τότε ή θα εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα των ακροτάτων ή θα εργαζόμαστε ως εξής:

Θα βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγο για $x=x_o$. 'Εστω ότι $f^{(\nu)}(x_o)\neq 0$, αν ο ν είναι αριθμός περιττός, τότε η f δεν έχει ακρότατα. Αν ο ν είναι άρτιος και $f^{(\nu)}(x_o)>0$, τότε για $x=x_o$, η f έχει τοπικό ελάχιστο. Αν $f^{(\nu)}(x_o)<0$, τότε για $x=x_o$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

Παραδείγματα:

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f, με $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x$.

Λύση: Η f είναι ορισμένη στο **R**. 'Εχουμε $f'(x)=x^2+3x+2$ και $f''(x)=2x+3$. Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $\rho_1=-1$ και $\rho_2=-2$. Αυτές είναι δυνατόν να είναι θέσεις ακρότατων. Για να εξακριβώσουμε, σχηματίζουμε τους αριθμούς $f''(-1)$ και $f''(-2)$.

'Εχουμε $f''(-1)=2(-1)+3=1>0$, 'Αρα για $x=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το:
$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}+3\,\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)=-\frac{5}{6}$$

Ανάλογα έχουμε $f''(-2)=2(-2)+3=-1<0$. 'Αρα για $x=-2$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το: $f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+3\,\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)=-\frac{2}{3}$

2. Να βρεθούν τα ακρότατα της f, με $f(x)=\eta\mu\frac{1}{x}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το **R***.

'Εχουμε $f'(x)=\left(\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και:

$$f''(x)=\frac{1}{x^3}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\eta\mu\frac{1}{x}\right)$$

Θα βρούμε τις ρίζες της f'. Είναι:

$$f'(x)=0 \iff -\frac{1}{x^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=0 \iff \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=0 \iff \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \iff$$

$$\iff \frac{1}{x}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2} \quad (\kappa\in Z) \iff x=\frac{1}{2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}}$$

Για την τιμή αυτή του x η f'' δίνει:

$$f''\left(\frac{1}{2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}}\right)=\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)^3\left[2\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)^3\left[0-\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)^4\eta\mu\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2})^4>0$, $\forall x\in Z$, εξετάζουμε το πρόσημο της παράστασης $-\eta\mu\left(2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $-\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{2}=-1<0$ και $-\eta\mu\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1>0$.

Στα σημεία $x=\frac{1}{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το:

$$f\left(\frac{1}{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Στα σημεία $x=\dfrac{1}{2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}}$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το:

$$f\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

7. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων των ακροτάτων μπορούμε να επιλύουμε διάφορες ασκήσεις, που αναφέρονται σε μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μιας γεωμετρικής μεταβλητής. Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων θα φροντίζουμε να παρουσιάζουμε τη γεωμετρική μεταβλητή ψ σαν συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x. Τούτο θα επιτύχουμε με τη βοήθεια των δεδομένων του προβλήματος και κατάλληλων μετασχηματισμών. Στη συνέχεια, θα εφαρμόζουμε ένα από τα θεωρήματα των ακροτάτων.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη: Έστω α η σταθερή περίμετρος (α>0) και x,ψ οι διαστάσεις ενός τυχαίου ορθογωνίου $(x,\psi\in R_{+}^{*})$. Θα προσπαθήσουμε να σχηματίσουμε μια συνάρτηση ως προς x. Έχουμε:

$$2x+2\psi=\alpha \iff \psi=\frac{\alpha}{2}-x \quad (1)$$

Αν Ε είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου, τότε είναι:

$$E=x\psi \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $E=x\left(\frac{\alpha}{2}-x\right) \iff E(x)=\frac{\alpha}{2}x-x^2$. Έχουμε

$$E'(x)=-2x+\frac{\alpha}{2}$$

Η Ε΄ έχει ρίζα $\frac{\alpha}{4}$. Ισχύει ότι $E''(x)=-2$. Παρατηρούμε ότι:

$$E''(x)<0, \quad \forall x\in R_{+}^{*}$$

οπότε $E''\left(\frac{\alpha}{4}\right)=-2<0$, δηλαδή η Ε για $x=\frac{\alpha}{4}$, παρουσιάζει μέγιστο. Από την (1), για $x=\frac{\alpha}{4}$, προκύπτει ότι $\psi=\frac{\alpha}{4}$, δηλαδή x=ψ, συνεπώς ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν και σταθερή περίμετρο είναι το τετράγωνο.

2. Να βρεθεί ποιος από τους κυλίνδρους με σταθερή ολική επιφάνεια $E_{o\lambda}=2\pi\alpha^2$ έχει το μεγαλύτερο όγκο (α>0).

Λύση: Υποθέτουμε ότι x είναι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και h το ύψος του, τότε η ολική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι:

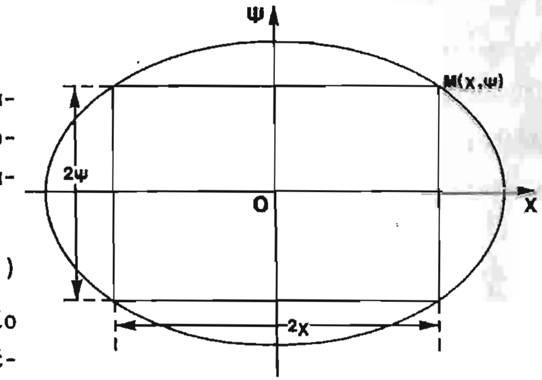
$$E_{o\lambda}=2\pi x^2+2\pi xh \iff 2\pi\alpha^2=2\pi x^2+2\pi xh \iff h=\frac{\alpha^2-x^2}{x} \quad (1)$$

Ο όγκος V του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση:

$$V=\pi x^2 h \xrightarrow{\delta\upsilon\nu.\ (1)} V(x)=\pi x^2\,\frac{\alpha^2-x^2}{x} \iff V(x)=\pi(\alpha^2x-x^3)$$

Η συνάρτηση V δίνει $V'(x)=\pi(\alpha^2-3x^2)$, με ρίζα $\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$. Είναι $V''(x)=-6\pi x$, άρα $V''\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)=-2\alpha\sqrt{3}\,\pi<0$. Άρα ο κύλινδρος παρουσιάζει μέγιστο όγκο για $x=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ και $h=\frac{\alpha^2-x^2}{x}=\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$.

3. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$.



Λύση: Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες μιας κορυφής Μ του ορθογωνίου είναι x,ψ, τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E=(2x)(2\psi)=4x\psi \implies E=4x\psi \quad (1)$$

Το σημείο Μ είναι και σημείο της έλλειψης, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την έλλειψη. Θα έχουμε επομένως:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \implies \psi=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \quad (2)$$

Η (1) δίνει δυν. (2): $\quad E(x)=\dfrac{4\beta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \quad (3)$

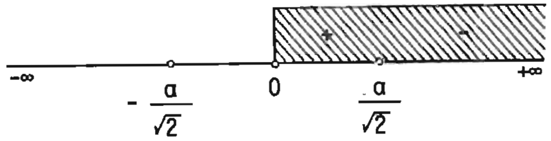
Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο, όταν E^2 γίνεται μέγιστο. Έτσι λοιπόν, θεωρούμε τη συνάρτηση E^2, με $E^2(x)=\frac{16\beta^2x^2}{\alpha^2}(\alpha^2-x^2)$. Είναι:

$$[E^2(x)]'=\frac{32\beta^2x}{\alpha^2}(\alpha^2-2x^2) \quad (4)$$

Ρίζα της $[E^2(x)]'=0$ είναι το σημείο $x_o=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ (η x=0 απορρίπτεται δι-

ότι $x>0$. Όμοια απορρίπτεται και η $x=-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$). Το πρόσημο της $[E^2(x)]'$ εί-

ναι:



Παρατηρούμε ότι στο $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ η E^2 παρουσιάζει μέγιστο. Για $x=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, η (2) δίνει $\psi=\frac{\beta}{\sqrt{2}}$. Επομένως το ζητούμενο μέγιστο εμβαδόν είναι:

$$E=4\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \iff E=2\alpha\beta$$

> 8. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων των ακροτάτων, μπορούμε να δείχνουμε μόνιμες ανισότητες. Ο τρόπος εργασίας φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι $x\geq\ln(1+x)$ (1), $\forall x\in(-1,+\infty)$.

Απόδειξη: Η (1) είναι ισοδύναμη με την $\ln(1+x)-x\leq0$, $\forall x\in(-1,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\ln(1+x)-x$, ορισμένη στο $(-1,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-1-x}{1+x}=\frac{-x}{1+x}$$

Ρίζα της f' είναι το σημείο $x_0=0$. Έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{-x}{1+x}\right)'=\frac{-1}{(1+x)^2}<0$$

Άρα είναι $f''(0)<0$, επομένως η f για $x=0$ παρουσιάζει μέγιστο το:

$$f(0)=\ln(1+0)-0=\ln1=0$$

Έτσι είναι $f(x)\leq f(0)$, $\forall x\in(-1,+\infty) \iff \ln(1+x)-x\leq0$.

> **9.** Για να μελετήσουμε την καμπυλότητα μιας συνάρτησης f εργαζόμαστε ως εξής:
> α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
> β) Βρίσκουμε την f'' και το πεδίο ορισμού της.
> γ) Βρίσκουμε το πρόσημο της f''.
> 1. Αν είναι $f''(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα (α,β).
> 2. Αν είναι $f''(x)<0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι κοίλη στο διάστημα (α,β).
> 3. Αν $f''(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f έχει διάγραμμα στο (α,β) ευθύγραμμο τμήμα.

Παραδείγματα:

1. Να εξεταστεί ως προς την καμπυλότητα η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=x^2\ln x$$

Λύση: Η f είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Είναι $f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x} \iff f'(x)=2x\ln x+x$ και $f''(x)=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+x' \iff f''(x)=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1 \iff f''(x)=2\ln x+3$. Θα βρούμε το πρόσημο της f''. Έστω $f''(x)>0 \iff 2\ln x+3>0 \iff \ln x>-\frac{3}{2} \iff \ln x>\ln e^{-\frac{3}{2}} \iff x>e^{-\frac{3}{2}} \iff x\in(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$

Άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,e^{-\frac{3}{2}})$.

Έτσι λοιπόν, το διάγραμμα της f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,e^{-\frac{3}{2}})$.

2. Να δειχθεί ότι το διάγραμμα της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-\ln(\ln x)$ στρέφει τα κοίλα άνω στο πεδίο ορισμού της.

Λύση: Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f. Πρέπει $x>0$ και

$$\ln x>0 \iff \ln x>\ln1 \iff x>1$$

Άρα $A=(1,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=-\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=-\frac{1}{x\ln x}$$

και:

$$f''(x)=\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$$

Θα βρούμε το πρόσημο της f''. Είναι:

$$\text{προσ}f''(x)=\text{προσ}\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}=\text{προσ}(\ln x+1)$$

Επειδή $x\in(1,+\infty)$ είναι $x>1 \implies \ln x>\ln1 \iff \ln x>0$. Άρα:

$$\ln x+1>0 \iff f''(x)>0,\ \text{για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

Επομένως το διάγραμμα της f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(1,+\infty)$

> **10.** Για να βρούμε τα πιθανά σημεία καμπής του διαγράμματος μιας συνάρτησης f, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και την f''. Αν για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f είναι $f''(x_0)=0$ και "εκατέρωθεν"

του σημείου αυτού η f'' αλλάζει πρόσημο, τότε το σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$ είναι σημείο καμπής.

Παραδείγματα:

1. Να βρεθούν τα σημεία καμπής του διαγράμματος της f, με $f(x)=x^2\ln x$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

και:
$$f''(x)=2\ln x+3$$

Θα βρούμε τις ρίζες της f''. Είναι:

$$f''(x)=0 \iff 2\ln x+3=0 \iff \ln x=-\frac{3}{2} \iff \ln x=\ln e^{-\frac{3}{2}} \iff x=e^{-\frac{3}{2}}$$

Είναι $e^{-\frac{3}{2}}\in(0,+\infty)$. Θα εξετάσουμε το πρόσημο της f''. Είναι:

$$f''(x)<0 \iff 2\ln x+3<0 \iff \ln x<-\frac{3}{2} \iff \ln x<\ln e^{-\frac{3}{2}} \iff x<e^{-\frac{3}{2}}$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $f''(x)>0 \iff x>e^{-\frac{3}{2}}$

Επειδή το σημείο $x_o=e^{-\frac{3}{2}}$ είναι ρίζα της f'' και "εκατέρωθεν" του η f'' αλλάζει πρόσημο, η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=e^{-\frac{3}{2}}$. Το σημείο καμπής M_o έχει συντεταγμένες $(e^{-\frac{3}{2}},f(e^{-\frac{3}{2}}))$ $\left(\text{είναι } f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\ln e^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

2. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε το σημείο M(1,2), να είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της συνάρτησης f, με τύπο $f(x)=\alpha x^3-\beta x^2$.

Λύση: Είναι $f'(x)=3\alpha x^2-2\beta x$ και $f''(x)=6\alpha x-2\beta$. Επειδή το σημείο M είναι σημείο καμπής, θα είναι $f(1)=2$ και $f''(1)=0$, δηλαδή $\alpha-\beta=2$ και $6\alpha-2\beta=0$. Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει $\alpha=-1$, $\beta=-3$. Για τις τιμές αυτές των α, β το διάγραμμα της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο M.

3. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$. Να δειχθεί ότι το διάγραμμά της έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά.

(θέμα εξετάσεων)

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Είναι:

$$f'(x)=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} \quad\text{και}\quad f''(x)=2\frac{(x-1)[x-(-2+\sqrt{3})][x-(-2-\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $f''(x)=0$ είναι $\rho_1=1$, $\rho_2=-2+\sqrt{3}$, $\rho_3=-2-\sqrt{3}$. Το

πρόσημο της f'' είναι:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
f''		$-$		$+$		$-$		$+$	

Άρα τα σημεία $-2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$ και 1 είναι τετμημένες σημείων καμπής.

Οι αντίστοιχες τεταγμένες είναι: $f(-2-\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{8+4\sqrt{3}}$, $f(-2+\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}}$ και $f(1)=1$. Για να είναι τα σημεία $M_1(1,1)$, $M_2\left(-2-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}+1}{8+4\sqrt{3}}\right)$ και $M_3\left(-2+\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}}\right)$ συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2+\sqrt{3} & \dfrac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}} & 1 \\ -2-\sqrt{3} & -\dfrac{\sqrt{3}+1}{8+4\sqrt{3}} & 1 \end{vmatrix}=0$$

που ισχύει.

Διαφορικό συνάρτησης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi=f(x)$, που είναι παραγωγίσιμη στο x και $h=\Delta x\neq 0$, μια οποιαδήποτε μεταβολή του x, η οποία δεν εξαρτάται από το x. Ονομάζεται **διαφορικό $df(x)$ ή df ή ακόμη $d\psi$ της f** στο σημείο x, το γινόμενο $f'(x)h$ ή $f'(x)\Delta x$, δηλαδή:

$$\boxed{df(x)=d\psi=f'(x)h=f'(x)\Delta x} \qquad (1)$$

Παρατήρηση 1:

Η τιμή του διαφορικού $df(x)$ εξαρτάται από την τιμή της f' στο x και από την τυχαία εκλεγμένη μεταβολή $h=\Delta x\neq 0$ του x.

Για παράδειγμα το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι:

$$dx=(x)'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x.$$

Επομένως στην (1) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τυχαία μεταβολή Δx του x, με το διαφορικό dx της συνάρτησης x, δηλαδή της ανεξάρτητης μεταβλητής, οπότε αυτή γράφεται:

$$\boxed{df(x)=f'(x)dx \quad ή \quad df=f'dx} \qquad (2)$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ο συμβολισμός Leibniz της παραγώγου, δηλαδή:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx} \quad ή \quad \psi'=\frac{d\psi}{dx}$$

Προφανώς ισχύει: $\boxed{\dfrac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$

Παρατήρηση 2:

Με τη βοήθεια της (2) προκύπτουν οι επόμενοι τύποι, που είναι ανάλογοι με τους κανόνες παραγώγισης:

$d(c)=0$, c σταθερό $d(f\cdot g)=gdf+fdg$	$d(f\pm g)=df\pm dg$ $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$
Αν $f(x)=g(u(x))$, τότε $df(x)=g'(u(x))\cdot u'(x)dx$	

Παρατήρηση 3:

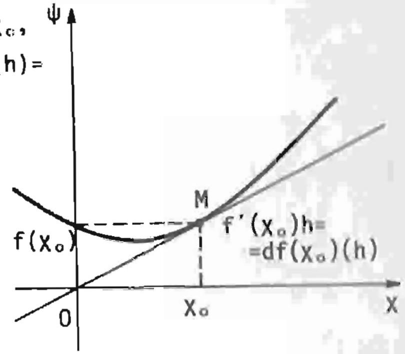
Το διαφορικό μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει τον πραγματικό αριθμό h στον πραγματικό αριθμό $f'(x_o)h$. Επομένως δεν πρέπει να γίνεται σύγχιση της έννοιας της παραγώγου της συνάρτησης f στο x_o που (είναι ένας αριθμός), με την έννοια του διαφορικού της f στο x_o, που είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο:

$$df(x_o)(h)=f'(x_o)h$$

(με ανεξάρτητη μεταβλητή το $h=\Delta x$ και όχι το x).

Γραφική παράσταση του διαφορικού

Το διαφορικό μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o, δηλαδή η συνάρτηση $df(x_o)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $df(x_o)(h)=f'(x_o)h$ παριστάνει μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_o)$. Έτσι λοιπόν η γραφική παράσταση του διαφορικού μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_o,f(x_o))$.

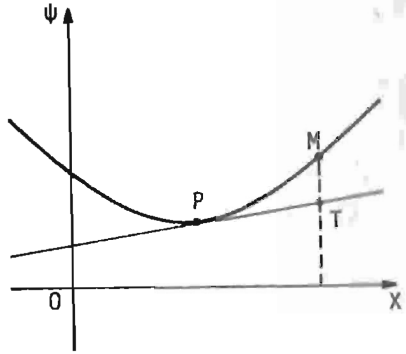


Γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού

Αποδεικνύεται ότι για πολύ μικρές τιμές του h η διαφορά $\Delta f=f(x_o+h)-f(x_o)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από το διαφορικό $df(x_o)=f'(x_o)h$. Έτσι γράφουμε:

$$\Delta f\approx f'(x_o)h \qquad (1).$$

Η σχέση (1) σημαίνει ότι το τμήμα PM της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με $P(x_o,f(x_o))$, $M(x_o+h,f(x_o+h))$ μπορεί να αντικατασταθεί από το τμήμα PT της εφαπτομένης της με ικανοποιητική προσέγγιση ($T=(x_o+h,\psi)$).



Παραδείγματα:

1. Να βρεθεί το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)=ημ^2x$.

Λύση:

Είναι $df(x)=f'(x)dx$ ή $df(x)=(2ημx\cdot συνx)dx$.

2. Να βρεθεί το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

Λύση:

Είναι $d\left(\frac{x^2}{e^x}\right)=\frac{e^x d(x^2)-x^2 de^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x 2xdx-x^2e^xdx}{(e^x)^2}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x$, να βρεθεί το διαφορικό της στο σημείο $x_o=3$.

Λύση:

Είναι $df(x)=f'(x)dx$ ή $df(x)=(xe^x)'dx$ ή $df(x)=(e^x+xe^x)dx$ ή $df(x)=$ $=e^x(1+x)dx$.

Άρα $df(3)=4e^3dx$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

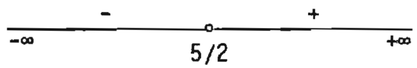
1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις f, με:

α) $f(x)=x^2-5x+6$, **β)** $f(x)=\ln x$, **γ)** $f(x)=e^x$, **δ)** $f(x)=ημx$ στο $[0,2π]$

ε) $f(x)=xe^x-1$, **στ)** $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$, **ζ)** $f(x)=\frac{1}{συνx}$

Λύση:

α) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ και $f'(x)=2x-5$, με $\mathcal{D}(f')=\mathbb{R}$. Θα βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$. Είναι:

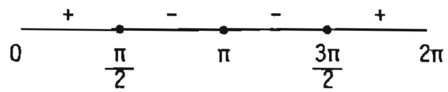


Άρα $f\downarrow$ στο $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ και $f\uparrow$ στο $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

β) Έχουμε $f'(x)=\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επομένως $f'(x)=\frac{1}{x}>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα $f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

γ) Είναι $f'(x)=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

δ) $f'(x)=συνx$, $\forall x\in[0,2π]$. Το πρόσημο του συνημιτόνου είναι:



Επομένως είναι $f\uparrow$ στο $\left[0,\frac{π}{2}\right]$, $f\downarrow$ στο $\left[\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right]$ και $f\uparrow$ στο $\left[\frac{3π}{2},2π\right]$

ε) Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x(1+x)$. Έχουμε:

$$e^x(1+x)>0 \iff 1+x>0 \iff x>-1$$

$$e^x(1+x)<0 \iff 1+x<0 \iff x<-1$$

Άρα είναι $f\uparrow$ στο $(-1,+\infty)$ και $f\downarrow$ στο $(-\infty,-1)$.

στ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-1,+\infty)$ (διότι $1+x>0 \iff x>-1$)

Είναι $f'(x)=\ln(x+1)+1$. Είναι $f'(x)>0 \iff \ln(x+1)+1>0 \iff \ln(x+1)>-1 \iff$ $\iff \ln(x+1)>\ln e^{-1} \iff x+1>e^{-1} \iff x>e^{-1}-1$.

Έτσι έχουμε ότι $f\downarrow$ στο $\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$ και $f\uparrow$ στο $\left(\frac{1}{e}-1,+\infty\right)$.

ζ) Η f είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}-\left\{x\in\mathbb{R}:\ x=κπ+\frac{π}{2},\ κ\in\mathbb{Z}\right\}$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι περιοδική, ώστε να εξετάσουμε τη μονοτο-

νία της σε διάστημα μιας περιόδου. Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T\in R-\{0\}$. Τότε $f(x+T)=f(x) \iff \dfrac{1}{συν(x+T)}=\dfrac{1}{συνx} \iff συν(x+T)=συνx$

$$(\forall x\in A) \iff \begin{cases} x+T=2κπ+x & (1) \\ \quad ή & \qquad κ\in Z \\ x+T=2κπ-x & (2) \end{cases}$$

Η (1) δίνει $T=2κπ$, με αρχική περίοδο $T_o=2π$.

Η (2) δε δίνει τιμή του T ανεξάρτητη του x.

Η f είναι λοιπόν, περιοδική με αρχική περίοδο $T_o=2π$. Θα εξετάσουμε τη μονοτονία της f σε διάστημα μιας περιόδου, δηλαδή στο σύνολο:

$$B=\left[0,\frac{π}{2}\right)\cup\left(\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right)\cup\left(\frac{3π}{2},2π\right]$$

Είναι: $\quad f'(x)=\dfrac{1'συνx-1(συνx)'}{συν^2x} \iff f'(x)=\dfrac{ημx}{συν^2x}$

Θα βρούμε το πρόσημο της f' στο σύνολο B. Έχουμε ότι προσf'(x) είναι το ίδιο με προσ $\dfrac{ημx}{συν^2x}$ είναι το ίδιο με προσημx. Το πρόσημο του ημx είναι:

x	0		$\frac{π}{2}$		$π$		$\frac{3π}{2}$		$2π$
ημx		+		+		-		-	

Άρα f↑ στο $\left[0,\frac{π}{2}\right)$, f↑ στο $\left(\frac{π}{2},π\right]$, f↓ στο $\left[π,\frac{3π}{2}\right)$ και f↓ στο $\left[\frac{3π}{2},2π\right]$

2. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 2αx+1, & \forall x\in(-\infty,1) \\ αx^2+x+2, & \forall x\in[1,+\infty) \end{cases}$

Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του α, ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση: Έχουμε $f'(x)=2α$, $\forall x\in(-\infty,1)$ και $f'(x)=2αx+1$, $\forall x\in[1,+\infty)$. Αν α>0 τότε η f είναι ↑ στο $(-\infty,1)$ και f↑ στο $[1,+\infty)$. Για να είναι η f↑ στο R πρέπει και αρκεί να είναι f↑ στο $(-\infty,1)$ και f↑ στο $[1,+\infty)$ και:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)\le f(1) \iff \lim_{x\to1^-}(2αx+1)\le α+3 \iff 2α+1\le α+3 \iff α\le2$$

Έτσι για $0<α\le2$ είναι f↑ στο R.

3. Να εξεταστεί αν είναι "1-1" οι επόμενες συναρτήσεις f, με:

α) $f(x)=\ln(1+x)-x$, $x>0$, β) $f(x)=x^3+3^x$, $x\in R$, γ) $f(x)=e^{-2x}\sqrt{x}$, $x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}(1+x)'-1=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{1-1-x}{1+x}=-\dfrac{x}{1+x}<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, επομένως σαν γνησίως μονότονη είναι και "1-1".

β) Είναι $f'(x)=3x^2+3^x\ln3$. Είναι $3x^2\ge0$, $\forall x\in R$, $3^x>0$, $\forall x\in R$, $\ln3>0$, άρα $f'(x)>0$, $\forall x\in R$. Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι και "1-1".

γ) Είναι $f'(x)=(e^{-2x})'\sqrt{x}+e^{-2x}(\sqrt{x})'=e^{-2x}(-2x)'\sqrt{x}+e^{-2x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$

$$=-2e^{-2x}\sqrt{x}+e^{-2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}=e^{-2x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right)=e^{-2x}\left(\frac{1-4x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Είναι $\dfrac{e^{-2x}}{2\sqrt{x}}>0$, $\forall x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$. Είναι ακόμα $1-4x<0 \iff \frac{1}{4}<x$. Έτσι λοιπόν, είναι $f'(x)<0$, $\forall x\in(1/4,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$, επομένως είναι και "1-1".

4. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$, ορισμένη στο $(0,+\infty)$.

α) Να δειχθεί ότι $f(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση h, με $h(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **(Rey Pastor: "Análisis Matemático")**

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε την φ, με $φ(x)=\ln x$. Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x,x+1]$, $x>0$. Επομένως για την φ, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο διάστημα $(x,x+1)$. Άρα υπάρχει αριθμός $ξ\in(x,x+1) \iff x<ξ<x+1$ (1), τέτοιος που:

$$φ'(ξ)=\frac{φ(x+1)-φ(x)}{x+1-x} \iff \frac{1}{ξ}=\frac{\ln(x+1)-\ln x}{1} \iff \frac{1}{ξ}=\ln\frac{x+1}{x} \quad (2)$$

Η (1) δίνει $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{ξ}>\dfrac{1}{x+1} \iff \dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{ξ}<\dfrac{1}{x}$ (3). Από (2) και (3), προκύπτει ότι: $\quad \dfrac{1}{x+1}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$

Άρα: $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}>0 \iff f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$

β) Θα βρούμε την παράγωγο της h. Είναι:

$$h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \iff \ln h(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \implies$$

$$\implies \frac{1}{h(x)}\,h'(x)=x'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' \iff$$

$$\iff h'(x)=h(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\,\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\,\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\iff h'(x)=h(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right] \iff h'(x)=h(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right] \quad (3)$$

Είναι $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ και $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$ από το πρώτο ερώτημα.

Άρα η (3) δίνει $h'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x=0 \\ x+2x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\end{cases}$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f.

β) Να δειχθεί ότι η f δεν είναι γνήσια μονότονη.

(Κολλέγιο Αγ. Γεωργίου, Πραιτώρια)

Απόδειξη:

α) Η παράγωγος της f στο R* είναι:

$$f'(x)=\left(x+2x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=1+4x\eta\mu\frac{1}{x}+2x^2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=1+4x\eta\mu\frac{1}{x}-2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

Η παράγωγος της f στο 0 είναι:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x+2x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\left(1+2x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}1+2\lim_{x\to0}x\eta\mu\frac{1}{x}=$$

$=1+2\cdot0=0$. Άρα $f'(0)=1$.

β) Θεωρούμε δυο τιμές του x, από το πεδίο ορισμού της f και σαν τέτοιες θεωρούμε τα σημεία $x_o=0$ και $x_o'=\frac{1}{2\pi\nu}$. Είναι $f'(0)=1>0$ και:

$$f'\left(\frac{1}{2\pi\nu}\right)=1+\frac{4}{2\pi\nu}\eta\mu2\pi\nu-2\sigma\upsilon\nu2\pi\nu=1+0-2=-1<0$$

Επειδή η f' δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, η f δεν είναι γνήσια μονότονη.

****6. α. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις f, με:**

1) $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}-x^3$, $\forall x\in R$

2) $g(x)=\ln x+x$, $\forall x\in[1,+\infty)$

3) $h(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}$, $\forall x\in R$.

β. Με τη βοήθεια της μονοτονίας των προηγουμένων συναρτήσεων, να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}-(x-1)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-1}-(x^2-1)^3$ στο R

2) $\ln(2x^2-1)+(2x^2-1)=\ln x^2+x^2$ στο $[1,+\infty)$

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$ στο R

Λύση:

α. 1) Είναι $f'(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\ln\frac{3}{4}-3x^2$. Έχουμε $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}>0$, $\ln\frac{3}{4}<0$, $-3x^2\leq0$. Επομένως είναι $f'(x)<0$, $\forall x\in R$. Άρα η f είναι ↓ στο **R**.

2) Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, $\forall x\in[1,+\infty)$, άρα η g είναι ↑ στο $(1,+\infty)$.

3) Είναι $h'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in R$ (είναι $\ln\frac{3}{5}<0$, $\ln\frac{4}{5}<0$ και $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}>0$, $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}>0$). Άρα η h είναι ↓ στο **R**.

β. 1) Η f σαν γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι "1-1". Επομένως ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)=f(x_2) \iff x_1=x_2$. Έτσι είναι:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}-(x-1)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-1}-(x^2-1)^3 \iff f(x-1)=f(x^2-1) \iff x-1=x^2-1 \iff$$

$$\iff x^2-x=0 \iff (x=0 \text{ ή } x=1)$$

2) Η g σαν γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι "1-1". Έτσι ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)=f(x_2) \iff x_1=x_2$. Είναι: $\ln(2x^2-1)+(2x^2-1)=\ln x^2+x^2 \iff$

$$\iff g(2x^2-1)=g(x^2) \iff 2x^2-1=x^2 \iff x^2=1 \iff x=1$$

3) Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο **R**, άρα είναι "1-1". Έτσι είναι:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} \iff h(x+1)=h(2x) \iff x+1=2x \iff x=1$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

β) Να λυθεί η ανίσωση $(2^{x-1}+3^{x-1})5^{1-3x}<(2^{1-3x}+3^{1-3x})5^{x-1}$ (1)

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}$. Επειδή $\ln\frac{3}{5}<0$, $\ln\frac{2}{5}<0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x>0$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x>0$, θα είναι και $f'(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι ↓ στο R.

β) Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{2^{x-1}+3^{x-1}}{5^{x-1}}<\frac{2^{1-3x}+3^{1-3x}}{5^{1-3x}} \iff \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-3x} \iff$$

$$\iff f(x-1)<f(1-3x) \quad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(x-1)<f(1-3x)$. Άρα θα είναι και $x-1>1-3x \iff x>\frac{1}{2}$.

**** 8. α) Να δειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)<f(x_2) \iff x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in A)$. Να δειχθεί ακόμα ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο A, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)<f(x_2) \iff x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in A)$.**

β) Να λυθεί στο R η ανίσωση $e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2>0$ (1).

Απόδειξη:

α) I. Έστω f↑ και $x_1<x_2$. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1<x_2 \implies f(x_1)<f(x_2) \quad (1)$$

(από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης).

II. Έστω f↑ και $f(x_1)<f(x_2)$. Θα δείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$f(x_1)<f(x_2) \implies x_1<x_2 \quad (2)$$

Αν ήταν $x_1\geq x_2$, τότε επειδή f↑, θα είχαμε ότι $x_2\leq x_1 \implies f(x_2)\leq f(x_1)$, που αντίκειται στην υπόθεση ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα αποκλείεται να είναι $x_2\leq x_1$. Έτσι λοιπόν ισχύει η (2). Από (1) και (2) προκύπτει η αποδεικτέα.

Ανάλογα εργαζόμαστε και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+(x^2+x+1)-(x+1)>0 \iff e^{x^2+x+1}+(x^2+x+1)>e^{x+1}+(x+1) \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=e^x+x$, ορισμένη στο R.

Είναι $f'(x)=e^x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι ↑ στο R. Η (2) γράφεται:

$$f(x^2+x+1)>f(x+1) \quad (3)$$

Επειδή η f↑ στο R και ισχύει η (3), θα είναι:

$$f(x^2+x+1)>f(x+1) \iff x^2+x+1>x+1 \iff x^2>0 \iff x\in\mathbb{R}^*$$

9. Να δειχθούν οι ανισότητες:

α) $x-\frac{x^2}{2}<\frac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ (1), $\forall x\in(0,+\infty)$

β) $\ln(x+1)-\frac{x(x+2)}{x+1}\leq 0$ (2), $x\geq 0$

Λύση:

α) Η (1) γράφεται ισοδύναμα $1-\frac{x}{2}<\frac{1}{\sqrt{x+1}}<1$. Θα δείξουμε τις ανισότητες: $\frac{1}{\sqrt{x+1}}<1$ (A) και $1-\frac{x}{2}<\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (B)

Η (A) γράφεται ισοδύναμα: $\sqrt{x+1}>1 \iff x+1>1 \iff x>0$. Επειδή $x\in(0,+\infty)$, η (A) ισχύει. Η (B) γράφεται ισοδύναμα:

$$2\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+1}<2 \iff 2\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+1}-2<0 \quad (\Gamma)$$

Αρκεί να δείξουμε τη (Γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+1}-2$, ορισμένη στο $[0,+\infty)$. Είναι $f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}-x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=-\frac{3x}{2\sqrt{x+1}}$. Είναι $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Έτσι έχουμε $x>0 \implies f(x)<f(0) \iff 2\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+1}-2<0$.

β) Η (2) επειδή $x+1>0$, γράφεται ισοδύναμα $(x+1)\ln(x+1)-x(x+2)\leq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x(x+2)$, ορισμένη στο $[0,+\infty)$.

Θα εξετάσουμε τη μονοτονία της f. Είναι:

$$f'(x)=(x+1)'\ln(x+1)+(x+1)[\ln(x+1)]'-x'(x+2)-x(x+2)'=\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}(x+1)'-$$

$$-(x+2)-x=\ln(x+1)+1-2x-2=\ln(x+1)-2x-1.$$

Άρα $f'(x)=\ln(x+1)-2x-1$.

Πρέπει να βρούμε το πρόσημο της f', που δεν υπολογίζεται εύκολα. Σχηματίζουμε την f''. Είναι:

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-2=\frac{1-2x-2}{x+1}=-\frac{2x+1}{x+1}<0$$

(εφόσον $x\geq 0$). Επειδή $f''(x)<0$, $\forall x\in[0,+\infty)$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα για:

$$0<x \implies f'(0)>f'(x) \iff \ln(0+1)-2\cdot 0-1>f'(x) \iff f'(x)<-1$$

Άρα η f' είναι αρνητική, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Έτσι είναι $0<x \Longrightarrow f(x)>f(0) \Longleftrightarrow (x+1)\ln(x+1)-x(x+2)>0$.

**** 10. α) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων και δεδομένου ότι η f, με $f(x)=e^x$ παραγωγίζεται στο R, να δειχθεί ότι η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\dfrac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$ παραγωγίζεται στο R, για κάθε $\lambda\in R$.**

β) Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες η φ είναι γνησίως φθίνουσα. **(θέμα εξετάσεων)**

Απόδειξη:

α) Είναι γνωστό ότι αν δυο συναρτήσεις f, g παραγωγίζονται στο A, τότε και οι συναρτήσεις f+g, f-g, af $(a\in R)$, f/g $(g(x)\neq 0\ \forall x\in A)$, παραγωγίζονται στο A.

Η συνάρτηση e^x παραγωγίζεται στο R, επομένως οι συναρτήσεις λe^x, e^{-x}, $(1+\lambda)e^{-x}$, $\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}$, $1+e^x$ παραγωγίζονται στο R. Επειδή $1+e^x\neq 0$, για κάθε $x\in R$, η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\dfrac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$ παραγωγίζεται στο R, για κάθε $\lambda\in R$.

β) Είναι $\varphi'(x)=\dfrac{\lambda e^x+(1+\lambda)e^{-x}+2(1+\lambda)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{\lambda e^{2x}+2(1+\lambda)e^x+(1+\lambda)}{e^x(1+e^x)^2}$ ≤ 0. Το πρόσημο της φ' εξαρτάται από τον αριθμητή, εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός, για κάθε $x\in R$. Ο αριθμητής είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο, ως προς e^x και για $e^x=\omega$, γράφεται $\sigma(\omega)=\lambda\omega^2+2(1+\lambda)\omega+(1+\lambda)$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4(1+\lambda)^2-4\lambda(1+\lambda)=4(1+\lambda)$. Το πρόσημο της διακρίνουσας είναι:

$-\infty$		-1		$+\infty$
	$-$		$+$	

1) Για κάθε $\lambda\in(-\infty,-1]$ είναι $\Delta\leq 0$, επομένως το τριώνυμο σ(ω) γίνεται ομόσημο του λ, δηλαδή αρνητικό, για κάθε $\omega\in R$. Έτσι είναι $\sigma(\omega)=\sigma(e^x)<0$, για κάθε $\omega=e^x$, από το R^*_+, δηλαδή η φ είναι $\downarrow$ στο R.

2) Για κάθε $\lambda\in(-1,+\infty)$ είναι $\Delta>0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 $(\rho_1,\rho_2\in R)$.

I. Αν $-1<\lambda<0$, το τριώνυμο γίνεται αρνητικό εκτός των ριζών. Επειδή $\rho_1\rho_2=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}<0$, οι ρίζες του τριωνύμου είναι ετερόσημες και αν ρ_2 είναι η θετική ρίζα, τότε θα είναι $\sigma(\omega)<0$, για $\omega>\rho_2$ και όχι για κάθε $\omega\in R^*_+$. Έτσι η φ για $-1<\lambda<0$, δεν είναι $\downarrow$ στο R.

II. Αν $\lambda>0$, τότε το τριώνυμο γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του.

Επειδή $\rho_1\rho_2=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}>0$, $\rho_1+\rho_2=-\dfrac{2(1+\lambda)}{\lambda}<0$, οι ρίζες του τριωνύμου είναι αρνητικές. Επειδή όμως $\omega=e^x>0$, το τριώνυμο θα είναι θετικό, για κάθε $\omega\in R^*_+$ δηλαδή θα είναι φ$\uparrow$ στο R.

II. Αν $\lambda=0$, τότε το τριώνυμο γράφεται $\sigma(\omega)=2\omega+1$. Επειδή $\omega=e^x>0$, το σ(ω) είναι θετικό, για κάθε $\omega\in R^*_+$, δηλαδή θα είναι φ$\uparrow$ στο R.

Από τα προηγούμενα βγαίνει το συμπέρασμα ότι αν $\lambda\in(-\infty,-1]$ η φ είναι $\downarrow$ στο R.

**** 11. α) Να δειχθεί ότι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της.**

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=a^x$ / R, με $0<a<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$ έχει ρίζα $x=2$, να δειχθεί ότι δεν έχει άλλες ρίζες πραγματικές.

(θέμα εξετάσεων)

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f/A $(A\subseteq R)$. Επειδή η f$\downarrow$ στο A, τότε:

$$\forall x_1,x_2\in A,\ \text{με}\ x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Επομένως για δυο διαφορετικά σημεία του A, τα x_1 και x_2 είναι $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Έστω ότι για το x_1 έχουμε $f(x_1)=0$. Τότε για το x_2 θα ισχύει:

$$x_2\neq x_1 \Longrightarrow f(x_2)\neq f(x_1)=0$$

δηλαδή $f(x_2)\neq 0$.

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α: Η f έχει ένα το πολύ σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της.

β) Έχουμε $f'(x)=a^x\ln a$, για κάθε $x\in R$. Είναι $a^x>0$, για κάθε $x\in R$ και $\ln a<0$, διότι η βάση είναι $e=2,7\ldots>1$ και $0<a<1$. Άρα $f'(x)<0$, για κάθε $x\in R$. Επομένως η f είναι $\downarrow$ στο R.

γ) Είναι $\qquad 3^x+4^x=5^x \Longleftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1 \qquad (1)$

Παρατηρούμε ότι $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ $\downarrow$ στο R (διότι $0<\dfrac{3}{5}<1$) και $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ $\downarrow$ στο R $\left(\text{διότι } 0<\dfrac{4}{5}<1\right)$. Έστω ότι η (1) έχει ρίζα πραγματική ρ διάφορη του 2 και είναι $\rho<2$, τότε επειδή η $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ και η $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις, θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \rho<2 \Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\rho} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \\ \rho<2 \Longrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{\rho} > \left(\frac{4}{5}\right)^{2} \end{array}\right| \Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\rho} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\rho} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2} = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\rho} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\rho} > 1$$

Άρα το ρ δεν είναι ρίζα της (1) (αν ήταν ρίζα έπρεπε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\rho} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\rho} = 1)$$

Όμοια εργαζόμαστε αν $2<\rho$.

*****12. Έστω η συνάρτηση $f: R_+ \longrightarrow R$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R_+. Υποθέτουμε ότι η f' είναι ↘ και $f'(x)>0$, $\forall x \in R_+$. Να αποδειχθεί ότι:**

α) $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ (1), $\forall x \in [1,+\infty)$

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \in R$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

γ) Ορίζουμε την ακολουθία (S_ν), με $S_\nu=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(\nu)$, $\nu \in N^*$. Να αποδειχθεί ότι η (S_ν) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \in R$.

(Πανεπιστήμιο Nice)

Απόδειξη:

α) Έστω $x\geq 1$. Η f ως συνεχής και παραγωγίσιμη στο R_+ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στα διαστήματα $[x-1,x]$, $[x,x+1]$. Επομένως η f στα διαστήματα αυτά ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x-1,x)$, ώστε $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$ (2) και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi' \in (x,x+1)$, ώστε $f(x+1)-f(x)=f'(\xi')$ (3). Η f' είναι ↘. Άρα για $\xi<x<\xi' \Longrightarrow f'(\xi)>f'(x)>f'(\xi')$ (4). Από (2), (3) και (4), έχουμε την (1).

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \in R$, άρα θα είναι και:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=0 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]\leq\lim_{x\to+\infty} f'(x)\leq\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)] \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

γ) Από τις (1), για $x=1,2,\ldots,\nu$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)-f(1)<f'(1)<f(1)-f(0) \\ f(3)-f(2)<f'(2)<f(2)-f(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\nu+1)-f(\nu)<f'(\nu)<f(\nu)-f(\nu-1) \end{array}\right| \xrightarrow{\text{προσθέτοντας κατά μέλη}}$$

$$\Longrightarrow f(\nu+1)-f(1)<S_\nu<f(\nu)-f(0) \quad (7)$$

Είναι $f'(x)>0$, $\forall x \in [1,+\infty)$. Άρα f↗.

I. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, $\ell \in R$. Θα δείξουμε ότι η (S_ν) έχει όριο στο R. Επειδή η f είναι ↗, θα είναι $f(x)\leq\ell$, $\forall x \in [1,+\infty)$. Επομένως θα είναι και $f(\nu)\leq\ell$. Έτσι η (7) δίνει $S_\nu<f(\nu)-f(0)\leq\ell-f(0)$, για κάθε $\nu \in N^*$.

Επομένως είναι $S_\nu<\ell-f(0)$, για κάθε $\nu \in N^*$, δηλαδή η (S_ν) είναι άνω φραγμένη. Είναι $f'(x)>0$, για κάθε $x \in R_+$. Επομένως οι παράγωγοι $f'(1)$, $f'(2),\ldots, f'(\nu)$, $f'(\nu+1)$ είναι θετικές. Επειδή $S_\nu=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(\nu)$ και $S_{\nu+1}=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(\nu)+f'(\nu+1)$, θα είναι $S_\nu<S_{\nu+1}$, δηλαδή η (S_ν) είναι ↗, άρα και κάτω φραγμένη. Άρα η (S_ν) έχει όριο στο R.

II. Έστω ότι η (S_ν) έχει όριο στο R. Θα δείξουμε ότι και η f έχει για $x \longrightarrow +\infty$, όριο στο R, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ $(\ell \in R)$. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει όριο στο $+\infty$ πραγματικό αριθμό. Επειδή f↗ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= =+\infty$ (άρα και $\lim f(\nu)=+\infty$). Η (7) δίνει:

$$f(\nu+1)-f(1)<S_\nu \Longrightarrow \lim[f(\nu+1)-f(1)]\leq\lim S_\nu$$

Επειδή $\lim[f(\nu+1)-f(1)]=\lim f(\nu+1)-f(1)=+\infty$, είναι και $\lim S_\nu=+\infty$, πράγμα άτοπο εφόσον η (S_ν) έχει όριο στο R. Άρα η f έχει όριο στο $+\infty$ πραγματικό αριθμό.

***** 13. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \longrightarrow R$, για την οποία υπάρχουν οι f', f'' και είναι $f''(x)>0$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).**

(Πανεπιστήμιο Paris I)

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι η g είναι ↗ στο (α,β), αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x)>0$, $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Είναι:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-\alpha)-[f(x)-f(\alpha)]}{(x-\alpha)^2} \Longleftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x-\alpha}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] \quad (1)$$

Επειδή η f ικανοποιεί στο διάστημα $[\alpha,x]$ τις συνθήκες του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha,x)$, τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, οπότε η (1) γίνεται: $g'(x)=\dfrac{1}{x-\alpha}[f'(x)-f'(\xi)]$ (2)

Επειδή $f''(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'\uparrow$, οπότε με $\xi<x \Longrightarrow f'(\xi)<f'(x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$. Είναι όμως και $x-\alpha>0$ (διότι $x>\alpha$), άρα η (2) δίνει $g'(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

14. Δίνεται η εξίσωση: $x+x^3+x^5+x^7=c_1^2(c_1-x)+c_2^2(c_2-x)$ (1), $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.

Απόδειξη: Η (1) γράφεται $x+x^3+x^5+x^7-c_1^2(c_1-x)-c_2^2(c_2-x)=0$ (2).

Θέτουμε $f(x)=x+x^3+x^5+x^7-c_1^2(c_1-x)-c_2^2(c_2-x)$, όπου f συνάρτηση του $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R. Έχουμε:

$$f'(x)=1+3x^2+5x^4+7x^6+c_1^2+c_2^2>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Επομένως $f\uparrow$ στο R. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο R, υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Το ξ αυτό είναι μοναδικό, διότι η f είναι $\uparrow$ στο R και επομένως "1-1".

15. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x)=x^2-3x+1$, **β)** $f(x)=2e^x+e^{-x}$, **γ)** $f(x)=x(\ln x)^2$, **δ)** $f(x)=x\ln x$

ε) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$, **στ)** $f(x)=e^x$**συνx**

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=2x-3$ και $f''(x)=2$. Ρίζα της f′ είναι το $\frac{3}{2}$. Επειδή $f''\left(\frac{3}{2}\right)>0$, η f παρουσιάζει στο $x_0=\frac{3}{2}$ τοπικό ελάχιστο το:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)+1$$

β) **1ος τρόπος:** Η f είναι ορισμένη, συνεχής και παραγωγίσιμη στο R. Είναι $f'(x)=2e^x+e^{-x}(-x)' \Longleftrightarrow f'(x)=2e^x-e^{-x}$ και $f''(x)=2e^x+e^{-x}$. Ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι το σημείο $x=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$, διότι:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 2e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2e^x=\frac{1}{e^x} \Longleftrightarrow 2e^{2x}=1 \Longleftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ln e^{2x}=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\ln e=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Έχουμε:

$$f''\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}+e^{-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{4}{\sqrt{2}}>0$$

Άρα η f παρουσιάζει στο σημείο $x=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ τοπικό ελάχιστο το:

$$f\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}+e^{-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

2ος τρόπος: Θα βρούμε το πρόσημο της f′. Έστω ότι:

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow 2e^x-e^{-x}>0 \Longleftrightarrow 2e^x-\frac{1}{e^x}>0 \Longleftrightarrow \frac{2e^{2x}-1}{e^x}>0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2e^{2x}-1>0 \Longleftrightarrow e^{2x}>\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln e^{2x}>\ln\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x\ln e>\ln\frac{1}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2x>\ln\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x>\frac{\ln\frac{1}{2}}{2} \Longleftrightarrow x>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x>\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Είναι ακόμα $f'(x)<0 \Longleftrightarrow x<\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $f'\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$. Επομένως η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{\sqrt{2}}$.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Έχουμε:

$$f'(x)=x'(\ln x)^2+x[(\ln x)^2]'=(\ln x)^2+x2\ln x(\ln x)'=(\ln x)^2+\frac{2x\ln x}{x}=(\ln x)^2+2\ln x=$$

$$=\ln x(\ln x+2)$$

Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι τα σημεία 1 και e^{-2} (διότι $\ln x=0 \Longleftrightarrow x=1$ και $\ln x+2=0 \Longleftrightarrow \ln x=-2 \Longleftrightarrow \ln x=\ln e^{-2} \Longleftrightarrow x=e^{-2}$).

Θα βρούμε το πρόσημο της f′. Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x(\ln x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,e^{-2})$, $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(e^{-2},1)$ και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Έτσι έχουμε:



Άρα για $x=e^{-2}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το:

$f(e^{-2})=e^{-2}(\ln e^{-2})^2=e^{-2}(-2\ln e)^2=4e^{-2}$ και για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=1(\ln 1)^2=0$.

δ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

Θα βρούμε τις ρίζες της f'. Έχουμε:

$$f'(x)=0 \iff \ln x+1=0 \iff \ln x=-1 \iff \ln x=\ln e^{-1} \iff x=e^{-1}$$

Είναι ακόμα $f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}$ και $f''(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0$. Άρα για $x=e^{-1}$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το:

$$f(e^{-1})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(\ln 1-\ln e)=\frac{1}{e}(-1)=-\frac{1}{e}$$

ε) Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f. Είναι:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}>0 \iff \sqrt{x}\,(x+1)>0 \iff x+1>0 \iff x>-1 \quad (1)$$

Πρέπει ακόμα να είναι $x>0$ (2) (για να ορίζεται η $\sqrt{x}$). Οι (1) και (2) δίνουν $x\in(0,+\infty)$. Είναι $f'(x)=\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)'}{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=\dots=\frac{x-1}{2x(x+1)}$ και

$$f''(x)=\frac{-2x^2+4x+2}{4x^2(x+1)^2}$$

Θα βρούμε τις ρίζες της f'. Είναι $f'(x)=0 \iff \frac{x-1}{2x(x+1)}=0 \iff x-1=0 \iff x=1$. Έχουμε $f''(1)=\frac{-2+4+2}{4\cdot 1^2(1+1)^2}=\frac{1}{4}>0$. Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=1$, το $f(1)=\ln\left(\frac{1+1}{\sqrt{1}}\right)=\ln 2$.

στ) Η f έχει πεδίο ορισμού το R. Είναι:

$$f'(x)=(e^x συνx)'=(e^x)'συνx+e^x(συνx)'=e^x(συνx-ημx)$$

και: $f''(x)=[e^x(συνx-ημx)]'=e^x(συνx-ημx)+e^x(-ημx-συνx)=-2e^x ημx$

Θα βρούμε τις ρίζες της f'. Είναι

$$f'(x)=0 \iff e^x(συνx-ημx)=0 \iff συνx-ημx=0 \iff συνx=ημx \iff$$

$$\iff συνx=συν\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \iff x=2κ\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \iff x=κ\pi+\frac{\pi}{4},\quad κ\in Z$$

Είναι:

$$f''\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}ημ\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

1) Αν ο κ είναι άρτιος έστω $2λ$, $λ\in Z$, τότε $ημ\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=ημ\left(2λ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=ημ\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και η (1) δίνει:

$$f''\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}<0$$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x=κ\pi+\frac{\pi}{4}$, με κ άρτιο. Το τοπικό μέγιστο είναι το:

$$f\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}συν\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}συν\left(2λ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}συν\frac{\pi}{4}=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Αν ο κ είναι περιττός, έστω $2λ+1$, τότε:

$$ημ\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=ημ\left(2λ\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=ημ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-ημ\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η (1) δίνει: $f''\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $x=κ\pi+\frac{\pi}{4}$, με κ περιττό. Το τοπικό ελάχιστο είναι το:

$$f\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}συν\left(κ\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}συν\left(2λ\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}\left(-συν\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{κ\pi+\frac{\pi}{4}}$$

**** 16. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-αx+β}}$**

α) Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β ώστε η f να ορίζεται σ' όλο R.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε να είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-αx+β}\,[f(x)-1]\right]=\frac{1}{2}$$

γ) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός β, ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$. (Πανεπιστήμιο Paris II)

Λύση:

α) Πρέπει να είναι $x^2-αx+β>0$, $\forall x\in R \iff Δ=α^2-4β<0$. Επομένως η ζητούμενη συνθήκη είναι $α^2-4β<0$ (1).

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-αx+β}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-αx+β}}-1\right]\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-αx+β})=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-αx+β)}{x+\sqrt{x^2-αx+β}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{αx-β}{x+x\sqrt{1-\frac{α}{x}+\frac{β}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{α-\frac{β}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{α}{x}+\frac{β}{x^2}}}=\frac{α}{2}$$

Επομένως είναι $\frac{1}{2}=\frac{α}{2} \iff α=1$.

γ) Για α=1 είναι $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-x+β}}$ και $f'(x)=\frac{2β-x}{2(x^2-x+β)^{\frac{3}{2}}}$. Για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο $\frac{2}{\sqrt{3}}$, πρέπει και αριστερά και δεξιά του $\frac{2}{\sqrt{3}}$ να αλλάζει πρόσημο.

Ρίζα της f' είναι η ρίζα του αριθμητή $x=2β$, άρα είναι:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=2β \iff β=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Οι τιμές $α=1$, $β=\frac{1}{\sqrt{3}}$ είναι δεκτές, διότι η (1) ισχύει. Πράγματι είναι:

$$1-\frac{4}{\sqrt{3}}<0$$

17. Να γίνει μελέτη ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να γίνει πίνακας μεταβολής των συναρτήσεων f, με:

α) $f(x)=ημx^2$, $x\in\left[-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right]$, **γ) $f(x)=x^x$, $x\in(0,+\infty)$,**

β) $f(x)=x-ημ2x$, $x\in[0,π]$, **δ) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in R$**

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=2xσυνx^2$. Θα βρούμε τις ρίζες της:

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ συνx^2=0 \quad (1)\end{cases}$$

Άρα μια ρίζα είναι το σημείο $x_1=0$. Η (1) δίνει:

$$συνx^2=συν\frac{π}{2} \iff x=\pm\sqrt{\frac{π}{2}}$$

Έτσι η f' έχει ρίζες $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{\frac{π}{2}}$, $x_3=\sqrt{\frac{π}{2}}$. Θα βρούμε το πρόσημο της f'.

I. Έστω $-\frac{π}{2}<x<-\sqrt{\frac{π}{2}}$, τότε $\frac{π^2}{4}>x^2>\frac{π}{2} \iff \frac{π}{2}<x^2<\frac{π^2}{4}<π$, άρα $συνx^2<0$.

II. Έστω $-\sqrt{\frac{π}{2}}<x<0 \implies \frac{π}{2}>x^2>0 \implies 0<x^2<\frac{π}{2} \implies$
$\implies συνx^2>0$.

III. Έστω $0<x<\sqrt{\frac{π}{2}} \implies 0<x^2<\frac{π}{2} \implies συνx^2>0$.

IV. Έστω $\sqrt{\frac{π}{2}}<x<\frac{π}{2} \implies \frac{π}{2}<x^2<\frac{π^2}{4}<π \implies συνx^2<0$.

Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα:

x	$-\frac{π}{2}$		$-\sqrt{\frac{π}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{π}{2}}$		$\frac{π}{2}$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)		↗	1 max	↘	0 min	↗	1 max	↘	

Από τον πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f και ακόμα ότι στα σημεία $x_1=-\sqrt{\frac{π}{2}}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{\frac{π}{2}}$, η f παρουσιάζει ακρότατα, τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα, που είναι αντίστοιχα 1, 0 και 1.

β) Είναι $f'(x)=1-2συν2x$. Θα βρούμε τη ρίζα και το πρόσημο της f'. Είναι: $f'(x)=0 \iff συν2x=\frac{1}{2} \iff συν2x=συν\frac{π}{3} \iff \left(x=\frac{π}{6} \text{ ή } x=\frac{5π}{6}\right)$

Έχουμε $1-2συν2x<0 \iff συν2x>\frac{1}{2}$. Είναι $συν2x=\frac{1}{2}$, όταν $2x=\frac{π}{3}$ ή $2x=\frac{5π}{3}$. Επομένως είναι $συν2x>\frac{1}{2}$, όταν $\left(0<2x<\frac{π}{3} \text{ ή όταν } \frac{5π}{3}<2x<2π\right) \iff \left(0<x<\frac{π}{6} \text{ ή όταν } \frac{5π}{6}<x<π\right)$. Είναι ακόμα:

$$1-2συν2x>0 \iff συν2x<\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Η (1) αληθεύει στα διαστήματα $\frac{π}{6}<x<\frac{5π}{6}$. Έτσι έχουμε:

x	0		$\frac{π}{6}$		$\frac{5π}{6}$		π
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	min	↗	max	↘	

Από τον πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f και ακόμα ότι στα σημεία $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$, η f παρουσιάζει ακρότατα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο που είναι αντίστοιχα $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-ημ\frac{2\pi}{6}$ και $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}-ημ\frac{10\pi}{6}$.

γ) Είδαμε στο κεφάλαιο των παραγώγων ότι $f'(x)=x^x(\ln x+1)$. Είναι $x^x>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ρίζα το σημείο $x_1=e^{-1}$ (διότι:

$$\ln e^{-1}+1=-1\ln e+1=-1+1=0)$$

Είναι: $\ln x+1>0 \iff \ln x>-1 \iff \ln x>\ln e^{-1} \iff x>\frac{1}{e}$

και: $\ln x+1<0 \iff \ln x<-1 \iff \ln x<\ln e^{-1} \iff x<\frac{1}{e}$

Έτσι έχουμε:

x	0		1/e		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	min	↗	

Από τον πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f και ακόμα ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_o=\frac{1}{e}$, που είναι το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$.

δ) Έστω $x\in(-\infty,0)$, τότε είναι $f(x)=\sqrt{-x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{(-x)'}{2\sqrt{-x}}=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$.

Έστω $x\in(0,+\infty)$, τότε είναι $f(x)=\sqrt{x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{(x)'}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Θα εξετάσουμε την παράγωγο στο 0. Είναι $f(0)=0$ και:

$$f'_{\alpha}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{-x}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{-\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}}=+\infty$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος στο 0.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ και $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x}}<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$.

Επομένως είναι f↘ στο $(-\infty,0)$ και f↗ στο $(0,+\infty)$.

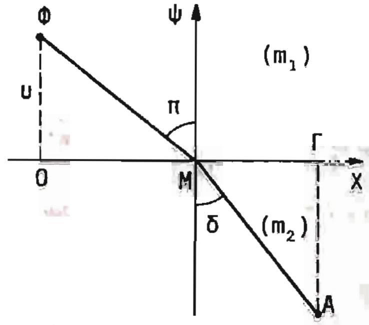
Στο σημείο $x_o=0$, η f' δεν υπάρχει. Παρατηρούμε ότι "εκατέρωθεν" του σημείου αυτού η f' αλλάζει πρόσημο και το $x_o=0$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$, που είναι το $f(0)=\sqrt{0}=0$.

Ο πίνακας μεταβολής σχηματίζεται εύκολα.

****18. Μια φωτεινή ακτίνα από το σημείο Φ φτάνει στο σημείο Α, αφού διαθλαστεί στο σημείο Μ της διαχωριστικής επιφάνειας x'x δυο υλικών μέσων. Να βρεθεί ο νόμος της διάθλασης του φωτός, δεδομένου ότι η διαδρομή της φωτεινής ακτίνας γίνεται στον ελάχιστο χρόνο.**

Λύση:

Έστω v_1, v_2 οι ταχύτητες του φωτός στα υλικά μέσα (m_1) και (m_2) αντιστοίχως και (ΦΟ)=υ, (ΑΓ)=α οι αποστάσεις των Φ, Α από τη x'x. Αν (ΟΜ)=x, (ΟΓ)=β, τότε ορίζεται η συνάρτηση t με:



$$t(x)=\frac{(ΦΜ)}{v_1}+\frac{(ΜΑ)}{v_2}=\frac{\sqrt{υ^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{α^2+(β-x)^2}}{v_2} \quad (1)$$

που η τιμή της στο x είναι ο χρόνος διαδρομής του φωτός από το Φ στο Α. Για το ελάχιστο του χρόνου αυτού θα πρέπει $t'(x)=0$, ή λόγω της (1),

$\frac{v_2 x}{\sqrt{υ^2+x^2}}=\frac{v_1(β-x)}{\sqrt{α^2+(β-x)^2}}$ ή $v_2 ημπ=v_1 ημδ$ (π,δ οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης).

Επομένως θα είναι: $\frac{ημπ}{ημδ}=\frac{v_1}{v_2}$ (σταθερό).

****19. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με:**

$$f(x)=(x-ε_1)^2+(x-ε_2)^2+\ldots+(x-ε_ν)^2$$

όπου $ε_1,ε_2,\ldots,ε_ν$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Λύση:

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι:

$f'(x)=2(x-ε_1)+2(x-ε_2)+\ldots+2(x-ε_ν)=2νx-2(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)$.

Επειδή $f''(x)=2ν>0$, η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $f'(x)=0$, δηλαδή στο σημείο:

$$x_o=\frac{ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν}{ν} \quad (1) \Rightarrow x_o=\frac{1}{ν}(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)$$

Το ελάχιστο της f είναι:

$f(x_o)=(x_o-ε_1)^2+(x_o-ε_2)^2+\ldots+(x_o-ε_ν)^2=νx_o^2-2x_o(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2)=$

$=x_o[νx_o-2(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)]+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2)=$

$=\frac{ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν}{ν}[-(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)]+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2)=$ (λόγω της (1))$=$

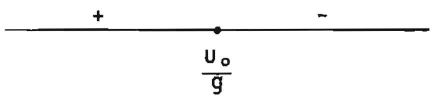
$=(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2)-\frac{1}{ν}(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)^2$.

20. Βλήμα εκσφενδονίζεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $υ_o$=300m/sec Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φθάσει αν η επιτάχυνση της βαρύτητας υποτεθεί σταθερή και ίση με g=10 m/sec² (οι τριβές θεωρούνται αμελητέες).

Λύση:

Οι αρχικές συνθήκες είναι t=0, s(0)=0 και $υ_o=\frac{ds}{dt}(0)$. Το διάστημα s, που θα διανύσει το βλήμα, δίνεται από τη συνάρτηση $s(t)=υ_o t-\frac{1}{2}gt^2$. Έχουμε $s'(t)=υ_o-2\frac{1}{2}gt$ ή $s'(t)=υ_o-gt$. Η s' έχει ρίζα $t=\frac{υ_o}{g}=\frac{300}{10}=30sec$

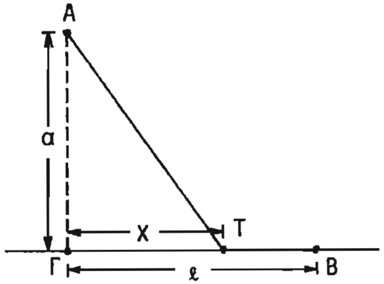
Εκατέρωθεν του $\frac{υ_o}{g}$ η s' αλλάζει πρόσημο ως εξής:



Άρα για $t=\frac{υ_o}{g}=30$ sec, το βλήμα φτάνει στο μέγιστο ύψος το οποίο είναι:

$$s(30)=300\cdot 30-\frac{1}{2}10\cdot 30^2=4.500 \text{ m}.$$

***21* Αυτοκινητόδρομος (σε ευθεία), με ανώτατο όριο ταχύτητας $υ_2$ km/h, περνά από μια πόλη Β και απέχει απόσταση (ΑΓ)=α από μια άλλη πόλη Α. Υποθέτουμε ότι η απόσταση (ΓΒ) είναι ℓ. Να προσδιοριστεί σε ποιό σημείο Τ πρέπει να συναντήσει τον αυτοκινητόδρομο ένας άλλος δρόμος που θα περνά από την πόλη Α, με όριο ταχύτητας $υ_1$ km/h ($υ_1<υ_2$), ώστε η διαδρομή ΑΤΒ να γίνεται στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.**



Λύση:

Υποθέτουμε ότι (ΓΤ)=x. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΤ έχουμε:

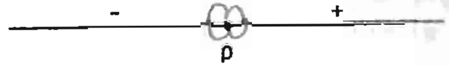
$$(AT)=\sqrt{x^2+α^2}.$$

Είναι και (ΤΒ)=ℓ-x. Οι χρόνοι που απαιτούνται για να διανυθούν οι δρόμοι (ΑΤ) και (ΤΒ) είναι:

$$t_1(x)=\frac{(AT)}{υ_1}=\frac{\sqrt{x^2+α^2}}{υ_1} \text{ και } t_2(x)=\frac{(TB)}{υ_2}=\frac{ℓ-x}{υ_2}.$$

Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την συνολική διαδρομή είναι: $t(x)=t_1(x)+t_2(x)$, δηλαδή $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+α^2}}{υ_1}+\frac{ℓ-x}{υ_2}$, με $0\le x\le ℓ$. Είναι:

$$'(x)=\frac{x}{υ_1\sqrt{x^2+α^2}}-\frac{1}{υ_2}=\frac{υ_2 x-υ_1\sqrt{α^2+x^2}}{υ_1υ_2\sqrt{α^2+x^2}},$$ που έχει ρίζα $ρ=\frac{αυ_1}{\sqrt{υ_2^2-υ_1^2}}$. Το ρόσημο της t'(x) είναι:



Άρα για x=ρ η συνάρτηση t(x) παρουσιάζει ελάχιστο. Έτσι λοιπόν για $=ρ=\frac{αυ_1}{\sqrt{υ_2^2-υ_1^2}}$ η διαδρομή ΑΤΒ είναι η συντομότερη.

22. Το κόστος κ(x) σε δρχ/km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση κ με $κ(x)=\frac{1200}{x}+4800x$, όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm².

Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα, για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο και την ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

Λύση:

Είναι: $$κ'(x)=-\frac{1200}{x^2}+4800$$

και: $$κ''(x)=\frac{2400}{x^3}.$$

Έχουμε: $κ'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1200}{x^2}+4800=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-\frac{1}{2}\right)$.

Επειδή x>0, η τιμή $-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Επίσης είναι $κ''\left(\frac{1}{2}\right)=2400\cdot 8>0$ και επομένως η συνάρτηση κ έχει ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$. Δηλαδή το ελάχιστο κόστος αντιστοιχεί σε διατομή σωλήνα: $\frac{1}{2}$ cm².

Το ελάχιστο αυτό κόστος είναι:

$$κ\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1200}{\frac{1}{2}}+4800\frac{1}{2}=2400+2400=4800 \text{ δρχ/km}.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

α) Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

β) Να συγκριθούν οι αριθμοί π^e και e^π. **(θέμα εξετάσεων)**

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το R^*_+. Είναι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και $f''(x)=-\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$. Ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι η $x_o=e$ (διότι $1-\ln x=0 \iff \ln x=1 \iff x_o=e$). Έχουμε:

$$f''(e)=-\frac{3-2\ln e}{e^3}=-\frac{3-2}{e^3}=\frac{-3+2}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$$

Άρα για $x=e$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$. Έχουμε ακόμα ότι: $f'(x)<0,\ \forall x\in(e,+\infty) \implies f\downarrow$ στο $(e,+\infty)$

$f'(x)>0,\ \forall x\in(0,e) \implies f\uparrow$ στο $(0,e)$

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α: Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e$ και είναι αυτό το $\dfrac{1}{e}$. Άρα είναι:

$$f(e)>f(\pi) \iff \frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi} \iff \pi\ln e>e\ln\pi \iff \ln e^{\pi}>\ln\pi^{e} \iff e^{\pi}>\pi^{e}$$

****24. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+\alpha\ln x-\beta x$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία 1 και 2. Να δειχθεί μετά ότι για τις τιμές αυτές των α και β, το 2 είναι θέση τοπικού ελάχιστου και το 1 είναι θέση τοπικού μέγιστου.** **(θέμα εξετάσεων)**

Απόδειξη: Έχουμε $f'(x)=2x+\dfrac{\alpha}{x}-\beta$ και $f''(x)=2-\dfrac{\alpha}{x^2}$. Για να είναι τα σημεία 1 και 2 θέσεις ακροτάτων, πρέπει να είναι ρίζες της $f'(x)=0$ και να μην είναι ρίζες της $f''(x)=0$, δηλαδή:

$$\left|\begin{array}{l} f'(1)=0 \ \text{ και } \ f'(2)=0 \\ f''(1)\neq 0 \ \text{ και } \ f''(2)\neq 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{ll} 2+\alpha-\beta=0, & 4+\dfrac{\alpha}{2}-\beta=0 \\ 2-\alpha\neq 0, & 2-\dfrac{\alpha}{4}\neq 0 \end{array}\right| \iff (\alpha=4,\beta=6)$$

Επειδή $f''(1)=-2<0$ και $f''(2)=1>0$, προκύπτει ότι στο 1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο 2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Άρα οι τιμές αυτές των α, β είναι δεκτές.

25. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση με $f(x)=\alpha\ln x+\beta x$, να παρουσιάζει στο σημείο $x_o=1$ τοπικό ελάχιστο το 3.

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Είναι $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x}+\beta$ και $f''(x)=-\dfrac{\alpha}{x^2}$. Το σημείο $M_o(1,3)$, πρέπει να ανήκει στο διάγραμμα της f. Επομένως είναι: $3=\alpha\ln1+\beta\cdot1 \iff 3=\alpha\cdot0+\beta \iff \beta=3$ (1)

Πρέπει ακόμα: $f'(1)=0 \iff \dfrac{\alpha}{1}+\beta=0 \iff \alpha+\beta=0$ (2)

Από (1) και (2), προκύπτει ότι $\alpha=-3$, $\beta=3$. Για να είναι δεκτές οι τιμές αυτές, πρέπει η f να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\alpha=-3$, $\beta=3$. Είναι $f''(x)=-\dfrac{-3}{x^2}=\dfrac{3}{x^2}$, με $f''(1)=\dfrac{3}{1}>0$. Άρα για $x=1$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(1)=-3\ln1+3\cdot1=3$.

****26. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^\lambda-\lambda x$, $\lambda\in(0,1)$, που είναι ορισμένη στο $[0,+\infty)$.**

α) Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει στο σημείο $x_o=1$, τοπικό μέγιστο.

β) Να δειχθεί ότι $x^\lambda-\lambda x\le 1-\lambda$, $\forall x\in[0,+\infty)$.

γ) Να δειχθεί ότι $\alpha^\lambda\beta^\mu\le\lambda\alpha+\mu\beta$ (1), $\forall\alpha,\beta\in(0,+\infty)$, $\lambda,\mu\in(0,1)$, $\lambda+\mu=1$

(Rudin W: "Principles of Mathematical Analysis")

Απόδειξη:

α) Είναι $f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}-\lambda=\lambda(x^{\lambda-1}-1)$ και $f''(x)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$.

Ρίζα της $f'(x)=0$ είναι το σημείο $x_o=1$. Είναι $f''(1)=\lambda(\lambda-1)<0$ (διότι $\lambda\in(0,1) \iff 0<\lambda<1$). Άρα η f παρουσιάζει στο σημείο $x_o=1$, τοπικό μέγιστο το $f(1)=1-\lambda$.

β) Επειδή το $f(1)=1-\lambda$ είναι τοπικό μέγιστο είναι:

$$f(x)\le f(1)\quad (\forall x\in[0,+\infty)) \iff x^\lambda-\lambda x\le 1-\lambda$$

γ) Η (1) γράφεται $\dfrac{\alpha^\lambda\beta^\mu}{\beta^{\lambda+\mu}}\le\dfrac{\lambda\alpha}{\beta^{\lambda+\mu}}+\dfrac{\mu\beta}{\beta^{\lambda+\mu}} \overset{\lambda+\mu=1}{\iff} \dfrac{\alpha^\lambda}{\beta^\lambda}\le\dfrac{\lambda\alpha}{\beta}+\dfrac{\mu\beta}{\beta} \iff$

$$\iff \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda\le\lambda\frac{\alpha}{\beta}+\mu \iff \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda-\lambda\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\le\mu \overset{\lambda+\mu=1}{\iff} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda-\lambda\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\le 1-\lambda \qquad (3)$$

Η ανίσωση (3) ισχύει, διότι προκύπτει από την $x^\lambda-\lambda x\le1-\lambda$, για $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

****27. Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο R, που έχει δεύτερη παράγωγο στο R. Αν είναι $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$, $\forall x\in R$ (1), να δειχθεί ότι**

α) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_o ($x_o\neq0$), τότε το ακρότατο αυτό είναι ελάχιστο.

β) Αν η f'' είναι συνεχής και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$, τότε αυτό είναι ελάχιστο.

(Πανεπιστήμιο Εδιμβούργου)

Απόδειξη:

α) Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 θα είναι $f'(x_0)=0$. Η (1), για $x=x_0$, δίνει:

$$x_0 f''(x_0)+3x_0[f'(x_0)]^2=1-e^{-x_0} \iff f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0} \quad (2)$$

(είναι $f'(x_0)=0$). Θα βρούμε το πρόσημο της $f''(x_0)$. Έστω $x_0>0$, τότε είναι: $-x_0<0 \overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow} e^{-x_0}<e^0 \Longrightarrow e^{-x_0}<1 \Longrightarrow 1-e^{-x_0}>0$

Έτσι η (2) δίνει $f''(x_0)>0$ (είναι $x_0>0$). Αν $x_0<0 \Longrightarrow -x_0>0 \Longrightarrow e^{-x_0}>e^0 \Longrightarrow e^{-x_0}>1 \Longrightarrow 1-e^{-x_0}<0$. Είναι και $x_0<0$, άρα η (2) δίνει $f''(x_0)>0$. Επειδή $f''(x_0)>0$, η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο.

β) Έστω $x\neq0$, η (1) δίνει:

$$f''(x)+3[f'(x)]^2=\frac{1-e^{-x}}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to0}f''(x)+3[\lim_{x\to0}f'(x)]^2=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x} \quad (3)$$

Η f'' είναι συνεχής, άρα $\lim_{x\to0}f''(x)=f''(0)$. Η f' (εφόσον παραγωγίζεται) είναι συνεχής, άρα $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$ (διότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο 0). Η (3) δίνει:

$$f''(0)+3\cdot0^2=1 \quad \left(\text{είναι } \lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{-x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1\right) \Longrightarrow f''(0)=1>0$$

Επειδή $f''(0)>0$, η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=0$ τοπικό ελάχιστο.

****28. Για ποιες τιμές του θετικού αριθμού α, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, με $f(x)=x^\alpha e^{2\alpha-x}$ γίνεται ελάχιστη;**

Λύση: Έχουμε $f'(x)=x^{\alpha-1}e^{2\alpha-x}(\alpha-x)$. Ρίζα της $f'(x)=0$ είναι το σημείο $x_0=\alpha$. Έχουμε $f''(x)=x^{\alpha-2}e^{2\alpha-x}[(\alpha-1)(\alpha-x)-x(\alpha-x)-x]$, οπότε:

$$f''(\alpha)=\alpha^{\alpha-2}e^\alpha(-\alpha)<0$$

δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο α, που είναι το $f(\alpha)=\alpha^\alpha e^\alpha$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(\alpha)=\alpha^\alpha e^\alpha$. Είναι:

$$g(\alpha)=e^{\alpha\ln\alpha}e^\alpha \iff g(\alpha)=e^{\alpha(\ln\alpha+1)}$$

Συνεπώς $g'(\alpha)=e^{\alpha(\ln\alpha+1)}(\ln\alpha+2)$. Ρίζα της $g'(\alpha)=0$ είναι η $\alpha=e^{-2}$, διότι:

$$\ln e^{-2}+2=-2\ln e+2=-2+2=0$$

Έχουμε $g''(\alpha)=e^{\alpha(\ln\alpha+1)}(\ln\alpha+2)(\ln\alpha+2)+e^{\alpha(\ln\alpha+1)}\frac{1}{\alpha}$, οπότε:

$$g''(e^{-2})=e^{-e^{-2}}\frac{1}{e^{-2}}>0$$

Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο για $\alpha=e^{-2}$. Συνεπώς για $\alpha=e^{-2}$ η μέγιστη τιμή $f(\alpha)=\alpha^\alpha e^\alpha$ της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστη.

29. Ένα σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα 80 m/sec. Το ύψος h που θα φτάσει το σώμα μετά από χρόνο t sec, δίνεται από την εξίσωση $h=80t-16t^2$. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα και ο χρόνος που θα χρειαστεί.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με τύπο:

$$h(t)=80t-16t^2 \quad (1)$$

Η (1) δίνει $h'(t)=80-32t$. Είναι $h'(t)=0$, όταν $t=\frac{80}{32}$. Σχηματίζουμε την $h''(t)$. Έχουμε $h''(t)=-32$, επειδή $h''\left(\frac{80}{32}\right)=-32<0$, η h παρουσιάζει μέγιστο όταν $t=\frac{80}{32}=2{,}5$sec. Για $t=2{,}5$sec η (1) δίνει το μέγιστο ύψος που είναι: $h(2{,}5)=80\cdot2{,}5-16(2{,}5)^2=100$m

30. Να βρεθούν δυο αριθμοί χ,ψ, τέτοιοι που να έχουν άθροισμα 12 και το διπλάσιο γινόμενο του πρώτου συν το τετράγωνο του δεύτερου να είναι ελάχιστο.

Λύση: Είναι $x+\psi=12 \iff \psi=12-x$ (1). Είναι $E=2x+\psi^2 \overset{(1)}{=\!=} 2x+(12-x)^2 \iff E=x^2-22x+144$. Θεωρούμε τη συνάρτηση E, με $E(x)=x^2-22x+144$. Είναι $E'(x)=2x-22$ και $E''(x)=2$. Η εξίσωση $E'(x)=0$ έχει ρίζα $x_0=11$. Είναι:

$$E'(11)=2>0$$

Άρα για $x=11$, η παράσταση E γίνεται ελάχιστη. Για $x=11$ η (1) δίνει $\psi=1$.

31. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα τρίγωνα που έχουν σταθερή περίμετρο και σταθερή βάση το ισοσκελές τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Απόδειξη: Έστω 2τ η σταθερή περίμετρος και α η σταθερή βάση. Αν χ,ψ είναι οι δυο άλλες πλευρές, έχουμε:

$$\alpha+x+\psi=2\tau \iff \psi=2\tau-x-\alpha \quad (1)$$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-x)(\tau-\psi)}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-x)[\tau-(2\tau-x-\alpha)]}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)[\tau(\alpha-\tau)+(2\tau-\alpha)x-x^2]}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=\tau(\tau-\alpha)[\tau(\alpha-\tau)+(2\tau-\alpha)x-x^2]$. Ευνόητο

είναι ότι όταν η f παίρνει μέγιστη τιμή, το ίδιο συμβαίνει και με την E.

'Εχουμε: $f'(\chi)=\tau(\tau-\alpha)(2\tau-\alpha-2\chi)$ (2)

και: $f''(\chi)=-2\tau(\tau-\alpha)$ (3)

Είναι $f'(\chi)=0 \Longleftrightarrow \tau(\tau-\alpha)(2\tau-\alpha-2\chi)=0 \Longleftrightarrow \chi=\tau-\frac{\alpha}{2}$. 'Αρα ρίζα της $f'(\chi)=0$ είναι το σημείο $\chi_o=\tau-\frac{\alpha}{2}$. Η (3) δίνει:

$$f''\left(\tau-\frac{\alpha}{2}\right)=-2\tau(\tau-\alpha)<0$$

'Αρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\chi=\tau-\frac{\alpha}{2}$. Η (1) δίνει για $\chi=\tau-\frac{\alpha}{2}$, $\psi=2\tau-\alpha-\chi=2\tau-\alpha-\tau+\frac{\alpha}{2}=\tau-\frac{\alpha}{2}$.

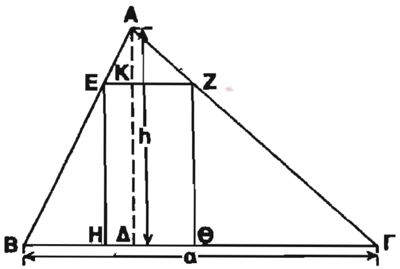
Επειδή $\chi=\psi=\tau-\frac{\alpha}{2}$, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επομένως από όλα τα τρίγωνα, που έχουν σταθερή περίμετρο και σταθερή βάση, το ισοσκελές έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με βάση ΒΓ=α και ύψος ΑΔ=h. Να βρεθεί το μεγίστου εμβαδού ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που να έχει τη βάση του στη ΒΓ και τις άλλες δυο κορυφές του στις άλλες πλευρές του τριγώνου.

Λύση: 'Εστω ΕΖΘΗ το ορθογώνιο με ΕΗ=χ και ΕΖ=ψ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι όμοια, επομένως:

$$\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{AK}{A\Delta} \Longleftrightarrow \frac{\psi}{\alpha}=\frac{h-\chi}{h} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \psi=\frac{\alpha}{h}(h-\chi) \quad (1)$$



Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E=\chi\psi$ (2)

Η (2) αν αντικαταστήσουμε την τιμή του ψ από την (1), δίνει:

$$E(\chi)=\frac{-\alpha}{h}\chi^2+\alpha\chi$$

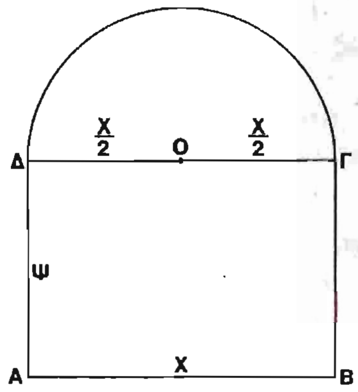
Είναι $E'(\chi)=\frac{\alpha}{h}(h-2\chi)$ και $E''(\chi)=\frac{\alpha}{h}(-2)$. Ρίζα της $E'(\chi)=0$ είναι η $\chi=\frac{h}{2}$ οπότε $E''\left(\frac{h}{2}\right)=-2\frac{\alpha}{h}<0$. 'Αρα για $\chi=\frac{h}{2}$ το ΕΖΘΗ έχει μέγιστο εμβαδόν. Η (1) για $\chi=\frac{h}{2}$ δίνει $\psi=\frac{\alpha}{2}$. Επομένως το ορθογώνιο ΕΖΘΗ έχει το μέγιστο εμβαδόν, όταν οι κορυφές του Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

33. 'Ενα παράθυρο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που στην άνω πλευρά τελειώνει σε ημικύκλιο (βλέπε σχήμα). **Αν η περίμετρος του παραθύρου είναι t, να δειχθεί ότι αν το παράθυρο έχει τη μέγιστη επιφάνεια τότε ο λόγος των διαστάσεων του ορθογωνίου είναι ίσος με 2.**

(Πανεπιστήμιο Αθηνών, τμηματικές εξετάσεις)

Απόδειξη: 'Εστω χ, ψ οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Η περίμετρος t είναι:

$$E=2\psi+\chi+\pi\left(\frac{\chi}{2}\right) \Longrightarrow \psi=\frac{1}{2}\left(t-\chi-\frac{\pi}{2}\chi\right) \quad (1)$$



Η επιφάνεια του παράθυρου είναι:

$$E=\chi\psi+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\chi}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Η (2), λόγω της (1) γράφεται:

$$E=\frac{1}{8}\left(4t\chi-4\chi^2-2\pi\chi^2+\pi\chi^2\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E=\frac{1}{8}(4t\chi-4\chi^2-\pi\chi^2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση E, με $E(\chi)=\frac{1}{8}(4t\chi-4\chi^2-\pi\chi^2)$. Είναι:

$$E'(\chi)=\frac{1}{8}(4t-8\chi-2\pi\chi) \quad \text{και} \quad E''(\chi)=\frac{1}{8}(-8-2\pi)$$

Η $E'(\chi)=0$ έχει ρίζα το σημείο $\chi_o=\frac{2t}{4+\pi}$ (3). Είναι $E''(\chi_o)=-\frac{1}{8}(8+2\pi)<0$.

Επομένως η επιφάνεια του παράθυρου γίνεται μέγιστη, όταν:

$$\chi=\frac{2t}{4+\pi} \quad (3)$$

Η (1) για την τιμή αυτή του χ, δίνει:

$$\psi=\frac{t}{4+\pi} \quad (4)$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι: $\frac{\chi}{\psi}=2$.

34. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κοιλότητα **και τα σημεία καμπής, η f με $f(\chi)=\alpha\chi^2+2\chi+1$, για τις διάφορες** πραγματικές **τιμές του α.**

Λύση: Η f είναι ορισμένη στο **R**. Είναι $f'(\chi)=2\alpha\chi+2$ και $f''(\chi)=2\alpha$.

1) 'Εστω α>0, τότε είναι $f'(\chi)>0 \Longleftrightarrow \chi>-\frac{1}{\alpha}$ και $f'(\chi)<0$, για $\chi<-\frac{1}{\alpha}$

'Αρα είναι f↓ στο $\left(-\infty,-\frac{1}{\alpha}\right)$ και f↑ στο $\left(-\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$. Ρίζα της $f'(\chi)=0$ είναι το σημείο $\chi_o=-1/\alpha$. 'Ετσι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\chi_o=-\frac{1}{\alpha}$

το $f\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{\alpha}$. Είναι ακόμα $f''(x)=2\alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο **R**. Σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

2) Έστω α<0, τότε έχουμε ανάλογα συμπεράσματα με την πρώτη περίπτωση.

3) Έστω α=0, τότε είναι $f'(x)=2>0$, δηλαδή η f↑ στο **R** και δεν παρουσιάζει ακρότατα. Η f είναι γραμμική, άρα δεν έχει κοίλα ή κυρτά.

35. Να μελετηθούν ως προς την καμπυλότητα (κοιλότητα), οι συναρτήσεις f, με:

α) $f(x)=xe^x-3e^x$, **β)** $f(x)=x3^{-\frac{x}{3}}$, **γ)** $f(x)=x^2\ln x$.

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το **R**. Είναι:

$$f'(x)=x'e^x+x(e^x)'-3(e^x)'=e^x+xe^x-3e^x=-2e^x+xe^x$$

και $f''(x)=-2(e^x)+x'e^x+x(e^x)'=-2e^x+e^x+xe^x=-e^x+xe^x=e^x(x-1)$

Είναι $f''(x)>0$, για $x>1$ και $f''(x)<0$, για $x<1$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,1)$.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Είναι:

$$f'(x)=x'(3^{-\frac{x}{3}})+x(3^{-\frac{x}{3}})'=3^{-\frac{x}{3}}+x3^{-\frac{x}{3}}(\ln 3)\left(-\frac{x}{3}\right)'=3^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}x3^{-\frac{x}{3}}\ln 3=$$

$$=3^{-\frac{x}{3}}\left(1-\frac{x\ln 3}{3}\right)$$

και: $f''(x)=(3^{-\frac{x}{3}})\left(1-\frac{x\ln 3}{3}\right)'+(3^{-\frac{x}{3}})'\left(1-\frac{x\ln 3}{3}\right)=-3^{-\frac{x}{3}}\frac{\ln 3}{3}\left(1-\frac{x\ln 3}{3}+1\right)=$

$$=-3^{-\frac{x}{3}}\frac{\ln 3}{3}(2-x\ln\sqrt[3]{3})$$

Είναι $3^{-\frac{x}{3}}\frac{\ln 3}{3}>0$ και $-3^{-\frac{x}{3}}\frac{\ln 3}{3}<0$. Έστω:

$$2-x\ln\sqrt[3]{3}>0 \iff 2>x\ln\sqrt[3]{3} \iff x<\frac{2}{\ln\sqrt[3]{3}}$$

Άρα είναι $f''(x)<0,\ \forall x\in\left(-\infty,\frac{2}{\ln\sqrt[3]{3}}\right)$. Ανάλογα βρίσκουμε ότι:

$$f''(x)>0,\quad \forall x\in\left(\frac{2}{\ln\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left(\frac{2}{\ln\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω

στο $\left(-\infty,\frac{2}{\ln\sqrt[3]{3}}\right)$.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Είναι:

$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x$$

και $f''(x)=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+x'=2\ln x+2+1=2\ln x+3$

Είναι: $2\ln x+3>0 \iff \ln x>-\frac{3}{2} \iff \ln x>\ln e^{-\frac{3}{2}} \iff x>e^{-\frac{3}{2}}$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $2\ln x+3<0 \iff x<e^{-\frac{3}{2}}$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,e^{-\frac{3}{2}})$.

36. Να εξεταστούν ως προς την καμπυλότητα και να βρεθούν τα πιθανά σημεία καμπής των διαγραμμάτων των συναρτήσεων f, με:

α) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, $x\in R^*$ **β)** $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x(x-2)}$, $x\in R-\{0,2\}$

(Rey Pastor: "Analisis Matemático")

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x^3}\right)'=\frac{-2x-3}{x^4}$ και $f''(x)=\ldots=\frac{6x+12}{x^5}$. Έχουμε ότι

πρόσf''(x) είναι ίδιο με πρόσ$x^5(6x+12)$ είναι ίδιο με πρόσ$x(6x+12)$:

$-\infty$		-2		0		$+\infty$
	+		−		+	

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,-2)$, στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-2,0)$ και στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$. Για x=-2, η f παρουσιάζει καμπή. Το σημείο καμπής είναι $M_o(-2,f(-2))=M_o\left(-2,\frac{1}{8}\right)$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{2(x^2-3x+3)}{x^2(x-2)^2}$ και $f''(x)=\frac{-4x^3+18x^2-36x+24}{x^3(x-2)^3}$. Το πρόσημο της f''(x) εξαρτάται από τον αριθμητή και το γινόμενο x(x-2) (είναι $x^3(x-2)^3=x(x-2)[x(x-2)]^2$, με $[x(x-2)]^2>0,\ \forall x\in A$).

Για να βρούμε το πρόσημο του αριθμητή, εργαζόμαστε ως εξής. Έστω ότι $\varphi(x)=-4x^3+18x^2-36x+24$. Είναι $\varphi'(x)=-12x^2+36x-36<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (διότι η διακρίνουσα του φ'(x) είναι αρνητική και α=-12<0). Άρα η φ είναι ↓ στο **R**. Επειδή η φ είναι γνήσια μονότονη και πολυωνυμική (τρίτου βαθμού), έχει μια μόνο πραγματική ρίζα, έστω ρ. Είναι $\varphi(0)\varphi(2)=24(-8)<0$. Άρα $0<\rho<2$

Έτσι είναι $f''(x)=\frac{-4(x-\rho)(x^2+\beta x+\gamma)}{x^3(x-2)^3}$. Το τριώνυμο $\sigma(x)=x^2+\beta x+\gamma$ είναι θε-

τικό $\forall x \in R$ (έχει αρνητική διακρίνουσα, διότι αν είχε θετική ή μηδέν διακρίνουσα, η εξίσωση $\varphi(x)=0$, θα είχε κι άλλες ρίζες εκτός της ρ). Έτσι το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από το γινόμενο $-4(x-\rho)x(x-2)$. Άρα το πρόσημο της f'' είναι:

x	$-\infty$		0		ρ		2		$+\infty$
f''		$+$		$-$		$+$		$-$	

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0)$ και στο $(\rho,2)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,\rho)$ και $(2,+\infty)$.

Ρίζα της f'' είναι το σημείο $x_o=\rho$. Άρα η f παρουσιάζει καμπή στο ρ. Το σημείο καμπής είναι $M_o(\rho,f(\rho))$.

37. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α, ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης f, με $f(x)=x^3-\alpha x^2$ στο σημείο καμπής της να περνά από την αρχή των αξόνων.

(θέμα εξετάσεων)

Λύση:

Η f έχει πεδίο ορισμού το **R**. Είναι $f'(x)=3x^2-2\alpha x$ και $f''(x)=6x-2\alpha$. Ρίζα της $f''(x)=0$ είναι το σημείο $x_o=\frac{\alpha}{3}$. Το πρόσημο της f'' είναι:

x	$-\infty$		$\alpha/3$		$+\infty$
f''		$-$		$+$	

Άρα το σημείο $M_o\left(\frac{\alpha}{3},f\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής. Είναι:

$$f\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{\alpha^3}{27}-\alpha\frac{\alpha^2}{9}=\frac{\alpha^3}{27}-\frac{\alpha^3}{9}=\frac{\alpha^3}{27}-\frac{3\alpha^3}{27}=-\frac{2\alpha^3}{27}$$

Έτσι το σημείο επαφής είναι $M_o\left(\frac{\alpha}{3},\frac{-2\alpha^3}{27}\right)$. Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο M_o του διαγράμματος της f. Η (ε) έχει συντελεστή διευθύνσεως: $f'\left(\frac{\alpha}{3}\right)=3\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2-2\alpha\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{3\alpha^2}{9}-\frac{2\alpha^2}{3}=\frac{3\alpha^2}{9}-\frac{6\alpha^2}{9}=-\frac{3\alpha^2}{9}$.

Η (ε) επομένως, έχει εξίσωση:

$$\psi+\frac{2\alpha^3}{27}=-\frac{3\alpha^2}{9}\left(x-\frac{\alpha}{3}\right) \quad (1)$$

Επειδή η εφαπτομένη περνά από την αρχή των αξόνων η (1) δίνει για $x=\psi=0$, ότι:

$$\frac{2\alpha^3}{27}=\frac{3\alpha^3}{27} \iff \alpha=0$$

38. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha\ln x-\beta x^2-x-2$ (με $\alpha,\beta \in R$), που είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_o=1$ και η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $x_1=2$, να είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε): $\psi=-21x+1$

(θέμα εξετάσεων)

Λύση:

Είναι $f'(x)=\frac{\alpha}{x}-2\beta x-1$, $\forall x \in R$ και $f''(x)=-\frac{\alpha}{x^2}-2\beta$.

Για να έχουμε στο σημείο $x_o=1$ καμπή, πρέπει:

$$f''(1)=0 \iff -\alpha-2\beta=0 \quad (1)$$

Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $x_1=2$, είναι: $f'(2)=\frac{\alpha}{2}-4\beta-1$

Ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας (ε) είναι $\lambda_{(\varepsilon)}=-21$. Επομένως είναι $\frac{\alpha}{2}-4\beta-1=-21$ (λόγω της παραλληλίας) $\iff \alpha-8\beta+40=0$ (2)

Το σύστημα των (1) και (2) δίνει $\beta=4$ και $\alpha=-8$. Για να είναι δεκτές οι τιμές των α και β, που βρήκαμε πρέπει η f για τις τιμές αυτές να αλλάζει κοιλότητα. Έχουμε $f(x)=-8\ln x-4x^2-x-2$, με:

$$f''(x)=\frac{8}{x^2}-8=\frac{8-8x^2}{x^2}=\frac{8(1-x^2)}{x^2}$$

Το πρόσημο της f'' είναι:

x	0		1		$+\infty$
f''		$+$		$-$	

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,1)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(1,+\infty)$. Επομένως οι τιμές $\alpha=-8$, $\beta=4$, είναι δεκτές.

****39. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \longrightarrow R$.**

α) Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω, τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ (1).

β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

γ) Να δειχθεί ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{\beta})$.

δ) Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[\alpha,\beta]$, τότε είναι:
$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, $\forall x_1,x_2 \in [\alpha,\beta]$, $x_1\ne x_2$, $\lambda_1,\lambda_2 \in R^*_+$, $\lambda_1+\lambda_2=1$

ε) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha,\beta]$, τότε είναι:
$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\ge\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, $\forall x_1,x_2 \in [\alpha,\beta]$, $x_1\ne x_2$, $\lambda_1,\lambda_2 \in R^*_+$, $\lambda_1+\lambda_2=1$

Απόδειξη:

α) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (α,β) είναι $f''(x)>0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(\alpha)+f(\beta)>2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Longleftrightarrow f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0 \quad (2)$$

Το θεώρημα της μέσης τιμής ισχύει για την f στο $[\alpha,\beta]$*. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν: $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, τέτοιοι ώστε:

$$f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\alpha-\beta}{2}f'(\xi_1) \quad \text{και} \quad f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_2)$$

Έτσι η (2) γράφεται: $\frac{\beta-\alpha}{2}[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]>0$ (3)

Αρκεί να δείξουμε την (3). Το θεώρημα της μέσης τιμής ισχύει για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$, τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=(\xi_2-\xi_1)f''(\xi)$$

οπότε η (3) γράφεται: $\frac{\beta-\alpha}{2}(\xi_2-\xi_1)f''(\xi)>0$ (4)

Επειδή $\frac{\beta-\alpha}{2}>0$, $\xi_2-\xi_1>0$, $f''(\xi)>0$ (εφόσον $f''(x)>0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$), η (4) είναι αληθής άρα και η (3).

β) Δείχνεται με ανάλογο τρόπο.

γ) Θεωρούμε την f, με $f(x)=e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

Η ανισότητα (1) του α' ερωτήματος δίνει για $f(x)=e^x$:

$$e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{1}{2}(e^\alpha+e^\beta)$$

δ) Επειδή $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ και $\lambda_1+\lambda_2=1$, είναι $\lambda_1,\lambda_2 \in (0,1)$. Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha<x_1<\beta \\ \alpha<x_2<\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1\alpha<\lambda_1x_1<\lambda_1\beta \\ \lambda_2\alpha<\lambda_2x_2<\lambda_2\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha(\lambda_1+\lambda_2)<\lambda_1x_1+\lambda_2x_2<\beta(\lambda_1+\lambda_2) \xrightarrow{\lambda_1+\lambda_2=1}$$

$$\Longrightarrow \alpha<\lambda_1x_1+\lambda_2x_2<\beta$$

Θεωρούμε την F, με $F(x)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x)$, ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Είναι:

$$F'(x)=f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)(\lambda_1x_1+\lambda_2x)'-\lambda_2f'(x)=\lambda_2f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-\lambda_2f'(x)$$

(είναι $[\lambda_1f(x_1)]'=0$). Άρα:

$$F'(x)=\lambda_2[f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-f'(x)] \quad (I)$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, άρα για την f' ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[x,\lambda_1x_1+\lambda_2x] \subseteq [\alpha,\beta]$.

---

* Επειδή υπάρχει η f'' υπάρχει και η f'. Επειδή η f παραγωγίζεται, είναι συνεχής.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x,\lambda_1x_1+\lambda_2x)$, τέτοιος που:

$$f''(\xi)=\frac{f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-f'(x)}{\lambda_1x_1+\lambda_2x-x} \Longleftrightarrow [\lambda_1x_1+x(\lambda_2-1)]f''(\xi)=f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-f'(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda_1x_1-\lambda_1x)f''(\xi)=f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-f'(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1(x_1-x)f''(\xi)=f'(\lambda_1x_1+\lambda_2x)-f'(x) \quad (II)$$

Από (I) και (II), προκύπτει $F'(x)=\lambda_2\lambda_1(x_1-x)f''(\xi)$ (III)

Είναι $f''(x)>0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, άρα και $f''(\xi)>0$, $\lambda_1\lambda_2>0$. Ρίζα της $F'(x)$ είναι το σημείο x_1.

1. Αν $\alpha<x<x_1 \Longrightarrow x_1-x>0$, άρα $F'(x)>0$, $\forall x \in (\alpha,x_1)$.
2. Αν $x_1<x<\beta \Longrightarrow x_1-x<0$, άρα $F'(x)<0$, $\forall x \in (x_1,\beta)$.

Επομένως η F παρουσιάζει μέγιστο στο x_1 και είναι:

$$F(x_1)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_1)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x_1)=f[x_1(\lambda_1+\lambda_2)]-f(x_1)(\lambda_1+\lambda_2)=f(x_1)-f(x_1)=0$$

Έτσι έχουμε $F(x)\leq F(x_1)=0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Δηλαδή είναι:

$$F(x)\leq 0 \Longrightarrow F(x_2)\leq 0 \Longleftrightarrow f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x_2)\leq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

ε) Δείχνεται ανάλογα με το δ' ερώτημα.

40. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=e^{1/x^2}$$

Λύση:

α) Είναι $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Η f είναι άρτια, διότι $f(-x)=e^{\frac{1}{(-x)^2}}=e^{\frac{1}{x^2}}=f(x)$.

γ) **Ρίζες και πρόσημο της f:** Ρίζες δεν υπάρχουν. Είναι:

$$f(x)>0 \Longleftrightarrow e^{1/x^2}>0, \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

δ) **Ρίζες και πρόσημο της f':** Είναι:

$$f'(x)=-e^{1/x^2}\frac{2}{x^3}$$

Ρίζες δεν υπάρχουν. Ισχύει:

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow -e^{1/x^2}\frac{2}{x^3}>0, \quad \forall x \in (-\infty,0) \quad \text{και} \quad f'(x)<0, \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

Άρα f↗ στο $(-\infty,0)$ και f↘ στο $(0,+\infty)$.

ε) **Ρίζες και πρόσημο της f'':** Είναι:

$f''(x)=\frac{2e^{1/x^2}}{x^4}\left(\frac{2}{x^2}+3\right)$. Ρίζες δεν υπάρχουν. Ισχύει: $f''(x)>0 \iff$

$$\iff \frac{2e^{1/x^2}}{x^4}\left(\frac{2}{x^2}+3\right)>0, \quad \forall x\in \mathbb{R}-\{0\}$$

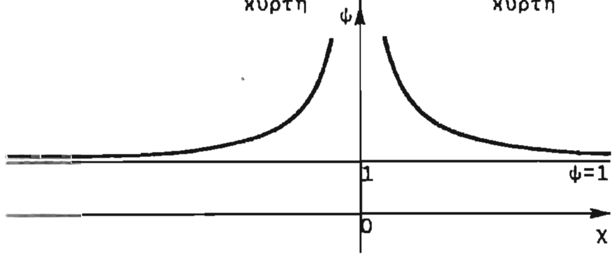
στ) **Ασύμπτωτες:** 1. Οριζόντια: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x^2}=1$. Άρα η ευθεία ψ=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

2. Κατακόρυφη: $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x^2}=+\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x^2}=+\infty$. Άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

3. Πλάγια ασύμπτωτη δεν υπάρχει.

ζ) Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα και χαράζουμε το διάγραμμα της f

x	−∞	0	+∞
f'	+		−
f''	+		+
f	+		+
	↗ χυρτή		↘ χυρτή



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $f(A)=(1,+\infty)$.

****41. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με $f(x)=1+(x+2)^{\frac{4}{5}}$ στο [-3,-1].** **(θέμα εξετάσεων)**

Λύση:

α) Η f δεν είναι άρτια, ούτε περιττή, ούτε περιοδική.

β) Η f είναι συνεχής.

γ) Η f(x)=0 δεν έχει ρίζες. Για την f έχουμε $f(x)>0, \forall x\in[-3,-1]$. Είναι: $f'(x)=\left[1+(x+2)^{\frac{4}{5}}\right]'=\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{4}{5}-\frac{5}{5}}=\frac{4}{5}(x+2)^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}$.

Η f' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της είναι: −3 (−) −2 (+) −1

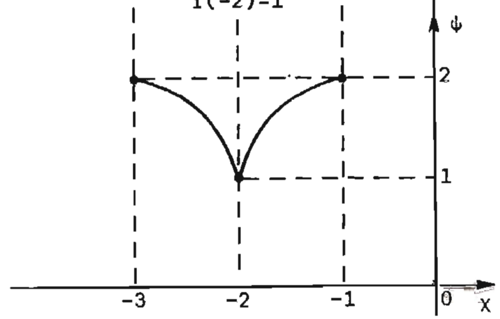
Είναι ακόμα: $f''(x)=\left[\frac{4}{5}(x+2)^{-\frac{1}{5}}\right]'=-\frac{4}{25}(x+2)^{-\frac{1}{5}-1}=-\frac{4}{25}(x+2)^{-\frac{6}{5}}=$

$$=-\frac{4}{25}\frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^6}}$$

Έχουμε ότι $f''(x)<0, \quad \forall x\in[-3,-2)\cup(-2,-1]$.

δ) Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα και με τη βοήθειά του χαράσσουμε το διάγραμμα της f.

x	−3		−2		−1	0
f		+		+		
f'		−	∄	+		
f''		− κοίλη	∄	− κοίλη		
		↘	ΤΕ ‖ f(−2)=1	↗		



Προβάλλοντας το διάγραμμα στον άξονα ψ'ψ, έχουμε ότι $f(A)=[1,2]$.

42. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Λύση: Έχουμε:

α) $A=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

β) Η f είναι άρτια, διότι $\forall x\in A \Longrightarrow -x\in A$ και $f(-x)=f(x), \quad \forall x\in A$.

γ) Οι ευθείες x=1 και x=-1 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πράγματι είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\,\frac{x^2+1}{x+1}=(+\infty)\frac{2}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\,\frac{x^2+1}{x+1}=(-\infty)\frac{2}{2}=-\infty$$

και:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}\,\frac{x^2+1}{x-1}=(+\infty)\frac{2}{-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}\,\frac{x^2+1}{x-1}=(-\infty)\,\frac{2}{-2}=+\infty$$

Εξετάζουμε αν έχουμε πλάγια ασύμπτωτη. Είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\alpha x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

Επειδή $\alpha=0$, έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=1$.

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$. Το πρόσημο της f' είναι:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		+		+		−		−	

Άρα f↑ στο $(-\infty,-1)$, f↑ στο $(-1,0)$, f↓ στο $(0,1)$ και f↓ στο $(1,+\infty)$.

ε) Είναι $f''(x)=\dfrac{-4(x^2-1)^2+4x2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3}=\dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Το πρόσημο της f'' είναι:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		+		−		+	

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,-1)$, η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-1,1)$ και η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$.

Σημεία καμπής δεν υπάρχουν αφού δε μηδενίζεται η f''.

Η f για $x=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αφού μηδενίζεται η f' και:

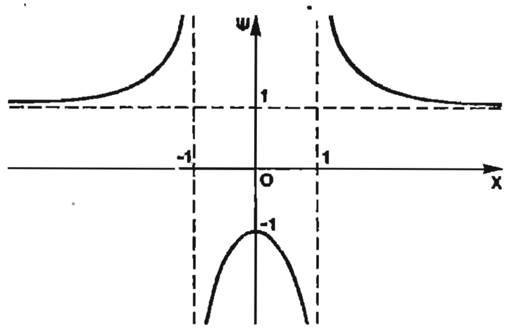
$$f''(0)=-4<0$$

στ) Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f'	+	+ (0 στο $x=0$)	−	−
f''	+	−	−	+
f	κυρτή	κοίλη	κοίλη	κυρτή
		ΑΣ* ($x=-1$)	Τ.Μ ($x=0$)	ΑΣ ($x=1$)

* ΑΣ=Ασυνέχεια

ζ) Με τη βοήθεια του πίνακα χαράζουμε το διάγραμμα της f, που είναι το επόμενο.



****43. Να μελετηθεί η συνάρτηση f, με** $f(x)=\begin{cases}1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}} & \text{αν } x\neq0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$

(J. Massena: "Calculus")

Λύση:

Ο τύπος της f γράφεται: $f(x)=\begin{cases}1-x, & \forall x\in(-\infty,0)\\ 1-xe^{-\frac{2}{x}}, & \forall x\in(0,+\infty)\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$

α) **Ρίζες και πρόσημο της f'**: Είναι $f'(x)=-1$, $\forall x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)=-e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Θα βρούμε την παράγωγο της f στο 0. Είναι:

$$f'_{\alpha}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

και: $$f'_{\delta}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-xe^{-\frac{2}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}(-e^{-\frac{2}{x}})=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}=0$$

Επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο 0.

Είναι $f'(x)=-1<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)=-e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Έτσι λοιπόν η f είναι ↓ στο $(-\infty,0)$ και ↓ στο $(0,+\infty)$.

Η f δεν έχει ακρότατα.

β) **Ρίζες και πρόσημο της f''**: Είναι $f''(x)=(1-xe^{-\frac{2}{x}})''=-\frac{4}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Άρα το διάγραμμα της f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Στο διάστημα $(-\infty,0)$, η f έχει διάγραμμα ημιευθεία.

γ) **Συνέχεια**: Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$. Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο σημείο 0. Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1-x)=1$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-xe^{-\frac{2}{x}})=1$ και $f(0)=1$. Άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο 0.

δ) Ασύμπτωτες:

I. Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν, εφόσον για $x_0\in R$ είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in R$$

(η f είναι παντού συνεχής στο R).

II. Εξετάζουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη. Είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-e^{-\frac{2}{x}}\right)=-1$$

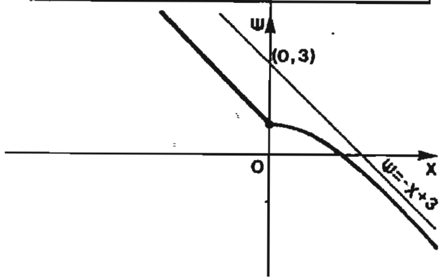
ιι $\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]=\lim_{x\to+\infty}(1-xe^{-\frac{2}{x}}+x)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-\frac{2}{x}}+x)=1+\lim_{x\to+\infty}x(1-e^{-\frac{2}{x}})=$

$$1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-e^{-\frac{2}{x}})'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=1+\lim_{x\to+\infty}(2e^{-\frac{2}{x}})=1+2=3$$

Έτσι η ευθεία $\psi=-x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωση.

III. Οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει. Έτσι είναι:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f'	-	-
f''		-



44. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

ύση:

α) Πεδίο ορισμού της f είναι το R*.

β) Η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, ούτε περιοδική και είναι συνεχής.

γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο R, άρα το διάγραμμα της f δεν συναντά τον άξονα x'x.

Είναι $f(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ και $f(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$. Άρα $\forall x\in(0,+\infty)$ το διάγραμμα της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x και $\forall x\in(-\infty,0)$ το διάγραμμα της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

δ) Είναι $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, με $f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=1$ και $f'(x)>0$, $\forall x\in(1,+\infty)$, $f'(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,1)$. Έτσι η f είναι ↓ στο $(-\infty,0)$ και ↓ στο $(0,1)$ και ↑ στο $(1,+\infty)$. Στο σημείο $x_0=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=e$.

ε) Είναι $f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$. Είναι $e^x>0$, $\forall x\in R$, $x^2-2x+2>0$, $\forall x\in R$

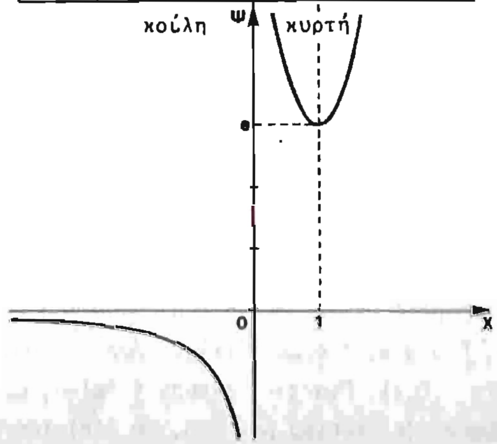
Αρα το πρόσημο της f'' εξαρτάται από τον παρονομαστή x^3. Επειδή $x^3=x\cdot x^2$ και $x^2>0$, $\forall x\in R^*$ το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το x. Έτσι είναι $f''(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ και $f''(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0)$.

Η f δεν έχει σημεία καμπής.

στ) Ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $x=0$ κατακόρυφη και $\psi=0$ οριζόντια, διότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$. Πλάγια ασύμπτωτη δεν υπάρχει.

ζ) Ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο επόμενος με τη βοήθεια του οποίου χαράσσουμε το διάγραμμα της f.

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
f'	-	- 0	+
f''	-	+	+
f	↘	↘ e T.E	↗



45. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

που είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$.

Λύση:

α) Η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή ούτε περιοδική.

β) **Πρόσημο και ρίζες της f:** Είναι:

$$\frac{\ln x}{x}=0 \iff \ln x=0 \iff x=1$$

Το πρόσημο της f εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή, εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός. Έτσι είναι:

x	0		1		$+\infty$
		-		+	

γ) **Πρόσημο και ρίζες της f':** Είναι $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Ισχύει:

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \iff 1-\ln x=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$$

Είναι: $f'(x)>0 \iff \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \iff 1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff \ln e>\ln x \iff e>x$

Έτσι είναι:

x	0		e		$+\infty$
		+		-	

δ) **Πρόσημο και ρίζες της f'':** Είναι $f''(x)=-\frac{3-2\ln x}{x^3}$, με ρίζα το $x=e^{\frac{3}{2}}$ (διότι $3-2\ln x=0 \iff \ln x=\ln e^{\frac{3}{2}} \iff x=e^{\frac{3}{2}}$). Είναι:

$$f''(x)>0 \iff -\frac{3-2\ln x}{x^3}>0 \iff 3-2\ln x<0 \iff 3<2\ln x \iff \ln e^{\frac{3}{2}}<\ln x \iff e^{\frac{3}{2}}<x$$

Άρα:

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
		-		+	

ε) **Ασύμπτωτες:** Κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονας ψ'ψ. Διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$$

Οριζόντια ασύμπτωτη είναι ο άξονας x'x, διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

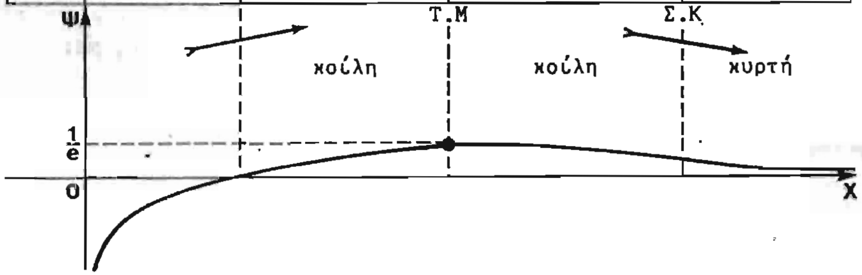
στ) Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

Ι. Για $x>e$, έχουμε $f'(x)<0$, συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(e,+\infty)$. Για $x<e$, έχουμε $f'(x)>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,e)$. Για $x=e$, έχουμε $f'(e)=0$, άρα στο σημείο αυτό η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(e)=\ln e/e=1/e$.

ΙΙ. Για $x>e^{\frac{3}{2}}$ έχουμε $\ln x>\frac{3}{2} \iff 3-2\ln x<0$. Συνεπώς $f''(x)>0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Για $x<e^{\frac{3}{2}}$ έχουμε $\ln x<\frac{3}{2} \iff 3-2\ln x>0$. Συνεπώς $f''(x)<0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Για $x=e^{\frac{3}{2}}$, έχουμε ότι $\ln x=\frac{3}{2} \iff 3-2\ln x=0$. Άρα $f''(e^{\frac{3}{2}})=0$, δηλαδή το διάγραμμα της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M_0(e^{\frac{3}{2}},f(e^{\frac{3}{2}}))$.

Με τη βοήθεια των προηγουμένων συμπερασμάτων καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα, που με τη βοήθεια του χαράζουμε το διάγραμμα της f.

x	0		1		e		$e^{3/2}$		$+\infty$
f'		+		+	0	-		-	
f''		-		-		-	0	+	
f		-	0	+		+		+	



Από το σχήμα προκύπτει ότι $f(A)=(-\infty,1/e]$.

46. Να μελετηθεί η συνάρτηση f, με $f(x)=\eta\mu^2 x$.

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι το **R**. Η f είναι περιοδική με περίοδο π (να δειχθεί).

Πρόσημο και ρίζες της f: Είναι $f(x)=\eta\mu^2x>0$, $\forall x\in[0,\pi]$, με ρίζες 0,π

Πρόσημο και ρίζες της f': Είναι $f'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu 2x$. Ρίζες της $f'(x)=0$, είναι τα σημεία 0, $\frac{\pi}{2}$, π. Το πρόσημο της f' είναι:

	0		π/2		π
		+		-	

Άρα η f είναι ↑ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και ↓ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Η f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $0,\frac{\pi}{2},\pi$, που είναι τα $f(0)=0$ (τοπικό ελάχιστο), $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ (τοπικό μέγιστο), $f(\pi)=0$ (τοπικό ελάχιστο).

Πρόσημο και ρίζες της f'': Είναι $f''(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$, με ρίζες $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{3\pi}{4}$ και πρόσημο:

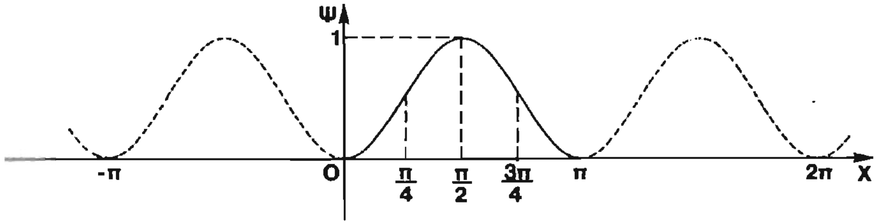
x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
f''		+		−		+	

Έτσι η f είναι κυρτή στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, κοίλη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$, κυρτή στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. Η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{3\pi}{4}$.

Το διάγραμμα της f δεν έχει ασύμπτωτες.

Η f είναι συνεχής στο **R**.

Το διάγραμμα της f είναι:



47. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{x-1}$$

ορισμένη στο R-{1}.

Λύση:

α) Η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή ούτε περιοδική.

β) **Ρίζες και πρόσημα των f, f' και f'':**

1. Η $f(x)=0$ έχει ρίζες 0 και -1 και το πρόσf(x) είναι ίδιο με το προσx(x+1)(x-1):

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		−		+		−		+	

2. Είναι $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Οι ρίζες της $f'(x)=0 \iff x^2-2x-1=0$, είναι $1-\sqrt{2}$ και $1+\sqrt{2}$. Ακόμα το προσf'(x) είναι ίδιο με το προσ(x^2-2x-1):

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
		+		−		−		+	

3. $f''(x)=\frac{4(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}$. Η $f''(x)=0$ δεν έχει ρίζες και το προσ$4(x-1)^3$ είναι ίδιο με το προσ$4(x-1)(x-1)^2$ είναι ίδιο με το προσ(x-1):

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		−		+	

γ) **Ασύμπτωτες:**

1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η x=1, διότι $\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x(x+1)}{x-1}=\pm\infty$.

2. Οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει, διότι $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x+1)}{x-1}=\pm\infty$.

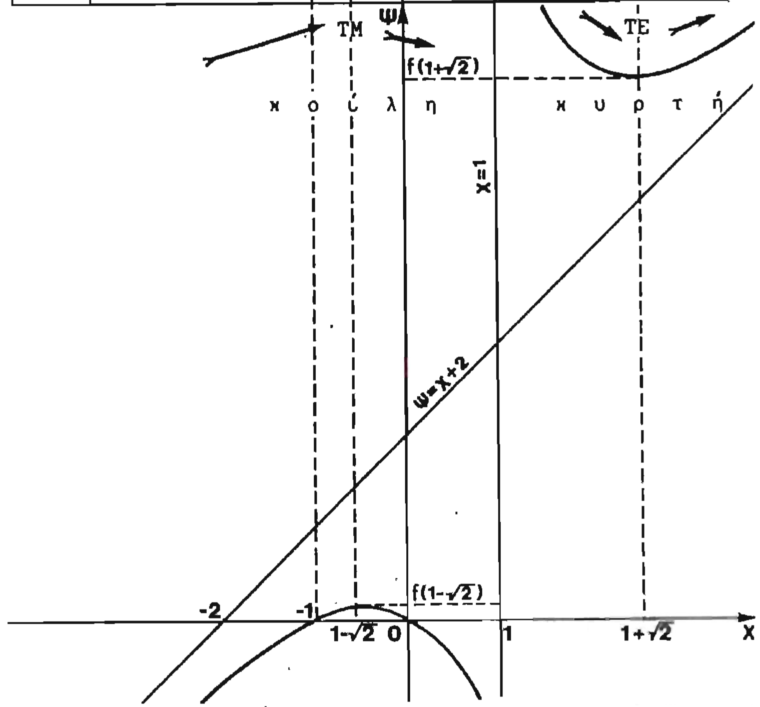
3. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη. Είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-x}=1,\quad \beta=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-\alpha x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+x}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

Άρα η ευθεία ψ=x+2 είναι πλάγια ασύμπτωτη.

Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα και με τη βοήθειά του χαράζουμε το διάγραμμα της f:

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f		−	0	+		+	0	−	‖	+		+	
f'		+		+	0	−		−	‖	−	0	+	
f''		−		−		−		−	‖	+		+	



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$[-\infty, f(1-\sqrt{2})]\cup[f(1+\sqrt{2}),+\infty]$$

48. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$$

Λύση:

α) Είναι $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

β) Δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

γ) **Ρίζες και πρόσημο της f:** Ρίζες δεν υπάρχουν. Είναι:

$$f(x)>0 \iff \frac{x^2}{\ln x}>0, \quad \forall x\in(1,+\infty) \text{ και } f(x)<0, \quad \forall x\in(0,1)$$

δ) **Ρίζες και πρόσημο της f':** Είναι:

$$f'(x)=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}=\frac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$$

Έχουμε: $f'(x)=0 \iff \dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}=0$, για $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

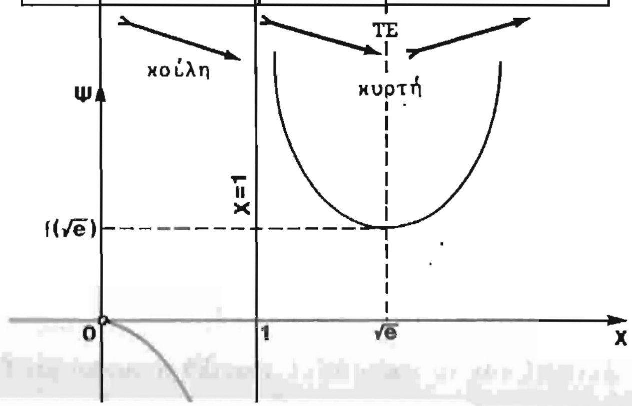
Ισχύει $f'(x)>0 \iff \dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}>0$, $\forall x\in(\sqrt{e},+\infty)$ και $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,1)\cup(1,\sqrt{e})$. Άρα η f↘ στο $(0,1)$, η f↘ στο $(1,\sqrt{e})$ και η f↗ στο $(\sqrt{e},+\infty)$.

ε) **Ρίζες και πρόσημο της f'':** Είναι $f''(x)=\dfrac{2(\ln x)^2-3\ln x+2}{(\ln x)^3}$. Ρίζες δεν υπάρχουν. Ισχύει $f''(x)>0 \iff \dfrac{2(\ln x)^2-3\ln x+2}{(\ln x)^3}>0$, $\forall x\in(1,+\infty)$ και $f''(x)<0$, $\forall x\in(0,1)$.

στ) **Ασύμπτωτες:** Οριζόντιες και πλάγιες δεν υπάρχουν. Κατακόρυφη είναι η ευθεία $x=1$.

ζ) Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα και χαράζουμε το διάγραμμα της f

x	0	1	√e	+∞
f'	-	-	0	+
f''	-	+		+
f	-	+		+



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $f(A)=(-\infty,0)\cup[f(\sqrt{e}),+\infty)$.

49. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

β) Είναι
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & \forall x\in(-\infty,0]\\[2mm] \dfrac{x}{1+x}, & \forall x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

γ) Είναι $f(-x)=\dfrac{-x}{1+|-x|}=-\dfrac{x}{1+|x|}=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι περιττή.

δ) Κατακόρυφες ασύμπτωτες η f δεν έχει.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της μορφής $\psi=\alpha x+\beta$. Είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0, \quad \beta=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

Άρα η $\psi=1$ είναι ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στην περιοχή του $+\infty$.

Είναι ακόμα: $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(1-x)x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}=0$

και: $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1$

Άρα η $\psi=-1$ είναι ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στην περιοχή του $-\infty$.

ε) Έχουμε:
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{αν } x<0\\[2mm] \dfrac{1}{(x+1)^2}, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

και: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{(1+|x|)x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+|x|}=1$

δηλαδή υπάρχει η $f'(0)$ και είναι $f'(0)=1$. Έτσι έχουμε $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, άρα f↗ στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

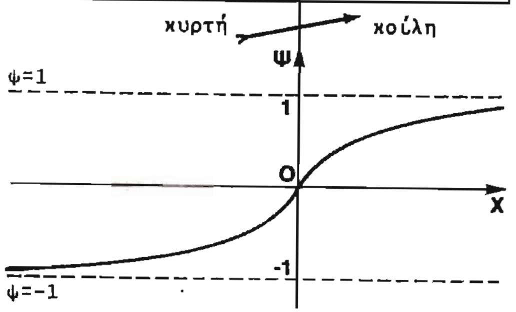
στ) Είναι:
$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x-1)^3}, & \text{αν } x<0\\[2mm] \dfrac{-2}{(x+1)^3}, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

Είναι $f''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}<0$, αν $x>0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$

και $f''(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^3}>0$, αν $x<0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0)$.

Καταστρώνουμε πίνακα μεταβολής της f, που είναι ο επόμενος και με τη βοήθειά του χαράζουμε το διάγραμμα της f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+		+
f''	+		-
f	-	Σ.Κ.	+



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $f(A)=(-1,1)$.

50. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f, με $f(x)=x^x$.

(Θέμα εξετάσεων)

Λύση:

α) Είναι $A=R^*_+$.

β) Η f δεν είναι άρτια, ούτε περιττή, ούτε περιοδική.

γ) Η f είναι συνεχής.

δ) Είναι $f(x)>0$, $\forall x\in R^*_+$, $f'(x)=x^x(1+\ln x)$, με ρίζα το e^{-1} (διότι:

$$1+\ln x=0 \iff \ln x=-1 \iff \ln x=\ln e^{-1} \iff x=e^{-1})$$

Πρόσημο της f':

	0		1/e		$+\infty$
f'		-		+	

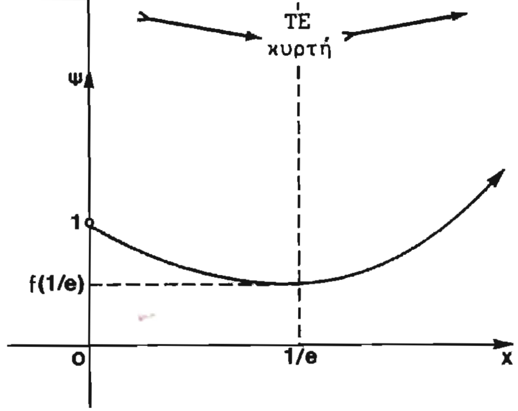
Είναι $f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^x\dfrac{1}{x}$, οπότε $f''(x)>0$, $\forall x\in R^*_+$.

ε) Ασύμπτωτες δεν υπάρχουν.

στ) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x^x=+\infty$.

Καταστρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών της f και με τη βοήθειά του χαράζουμε το διάγραμμα της f.

x	0		1/e		$+\infty$
f		+		+	
f'		-	0	+	
f''		+		+	



51. Έστω ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος f'' μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0\in\Delta$, την εφαπτομένη στο $M_0(x_0,f(x_0))$ και τα σημεία $N(x,\psi)$ της εφαπτομένης και $M(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με κοινή τετμημένη $x\in\Delta$. Να αποδειχθεί ότι:

- **Αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f''(x)\geq 0$, τότε $f(x)\geq\psi$.**
- **Αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f''(x)\leq 0$, τότε $f(x)\leq\psi$.**

Λύση:

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M_0 έχει εξίσωση $\psi=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Επομένως για κάθε $x\in\Delta$ με $x\neq x_0$ θα έχουμε: $f(x)-\psi=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ (1). Από το θεώρημα της μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ x και x_0, τέτοιο ώστε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ και έτσι η (1) γράφεται: $f(x)-\psi=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0)$ (2). Επίσης υπάρχει ξ_1 μεταξύ ξ και x_0, τέτοιο ώστε $f'(\xi)-f'(x_0)=f''(\xi_1)(\xi-x_0)$ και η (2) γίνεται: $f(x)-\psi=f''(\xi_1)(\xi-x_0)(x-x_0)$ (3). Επειδή όμως το ξ βρίσκεται μεταξύ x και x_0, θα είναι πάντοτε: $(\xi-x_0)(x-x_0)>0$ (4).

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- **Για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f''(x)\geq 0$.** Τότε θα είναι $f''(\xi_1)\geq 0$, οπότε από την (3), λόγω της (4), θα έχουμε $f(x)\geq\psi$.
- **Για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f''(x)\leq 0$.** Με ανάλογη εργασία βρίσκουμε ότι $f(x)\leq\psi$.

Γενικές Ασκήσεις - Μικτές Ασκήσεις* - Θέματα

****1. α)** Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, τότε να δειχθεί ότι η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x}$ είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f'(x)=1+f^2(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

ii) $\lim v^2 f\left(\dfrac{\pi}{v^2}\right)=\pi$.

(Bac. Montpellier)

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Είναι:

$$g'(x)=\frac{f'(x)2x-2f(x)}{4x^2}=\frac{f'(x)x-f(x)}{2x^2}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\dfrac{f'(x)x-f(x)}{2x^2}\geq 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με:

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \forall x\in(0,+\infty)\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Για τη h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$, τέτοιος που $f(x)=xf'(\xi)$ (1). Επειδή $f''(x)\geq 0$ η f' είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άρα: $\xi<x \Rightarrow f'(\xi)\leq f'(x)\Rightarrow xf'(\xi)\leq xf'(x)$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει $f(x)\leq xf'(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)\geq 0$. Έτσι είναι $g'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δηλαδή η g είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) i) Η (1) για x=0 δίνει $f'(0)=1+f^2(0)=1+0=1$.

Είναι $f'(0)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

ii) Ισχύει ότι $\lim\dfrac{\pi}{v^2}=0$. Άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow \lim_{\frac{\pi}{v^2}\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{v^2}\right)}{\frac{\pi}{v^2}}=1\Rightarrow \lim_{v\to+\infty} v^2 f\left(\frac{\pi}{v^2}\right)\frac{1}{\pi}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{v\to+\infty} v^2 f\left(\frac{\pi}{v^2}\right)=\pi.$$

****2. α)** Δίνεται το πολυώνυμο $g(x)=\alpha_{2v}x^{2v}+\alpha_{2v-2}x^{2v-2}+\alpha_{2v-4}x^{2v-4}+\cdots+\alpha_2x^2+\alpha_0$, με θετικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=g(x)+\alpha x+\beta$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

β) Να δειχθεί ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για κ διαφορετικές τιμές του x, τότε η f' μηδενίζεται για κ-1 τουλάχιστον τιμές του x.

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Είναι $g''(x)=(2v-1)2v\alpha_{2v}x^{2v-2}+\cdots+2\alpha_2$. Η g'' έχει άρτιες δυνάμεις του x και θετικούς συντελεστές, άρα είναι $g''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι ακόμα $(\alpha x+\beta)''=0$. Επομένως είναι $f''(x)=g''(x)+0 \Rightarrow f''(x)>0$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι $f(\rho_1)=f(\rho_2)=\cdots=f(\rho_\kappa)=0$. Τότε σε κάθε διάστημα $[\rho_i,\rho_{i+1}]$, $i=1,2,3,\ldots,(\kappa-1)$ εφαρμόζεται το θ. του Rolle Επομένως σε κάθε διάστημα (ρ_i,ρ_{i+1}) θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_i, τέτοιο ώστε $f'(\xi_i)=0$. Επειδή όμως τα διαστήματα είναι κ-1, θα υπάρχουν κ-1 πραγματικοί αριθμοί ξ_i, τέτοιοι ώστε $f'(\xi_i)=0$, με $i=1,2,3,\ldots,\kappa-1$.

*****3. α)** Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f(x)f'(x)=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f(x)=1$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει η $f''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$[f(x)-f'(x)]^2=2f'(x)f''(x)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=f(0)=0$

i) Να δειχθεί ότι $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=\alpha\cdot e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (α σταθερά).

ii) Να δειχθεί ότι $f(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(D'apres le bac.C et E, Grenoble)

Λύση:

α) Η (1) γράφεται $2f(x)f'(x)=0$ ή $[f^2(x)]'=0\Rightarrow f^2(x)=$σταθερά. Έστω

---

* Οι ασκήσεις που ερωτήματά τους αναφέρονται σε ολοκληρώματα, θα μελετηθούν μετά την ολοκλήρωση της σχετικής θεωρίας.

$f^2(x)=\alpha$ (2). Η (2) για $x=0$ δίνει $f^2(0)=\alpha \Rightarrow \alpha=1$. Έτσι η (2) δίνει $f^2(x)=1 \Rightarrow f(x)=\pm 1$. Επειδή $f(x)>0$ είναι $f(x)=1$.

β) i) Η (2) γράφεται $[f(x)]^2+[f'(x)]^2-2f(x)f'(x)=2f'(x)f''(x)$ ή $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$ ή $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=$ $=[[f(x)]^2+[f'(x)]^2]'$.

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα της άσκησης 49, της ομάδας αυτής* είναι $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=\alpha e^x$ (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Η (3) για $x=0$ δίνει $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=\alpha e^0$ ή $0=\alpha$. Έτσι η (3) δίνει $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=0 \Rightarrow f(x)=f'(x)=0$. Άρα $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

****4. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί ότι:**

i) Για τη συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha,\beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $F'(c_0)=0$.

ii) Αν $c \notin [\alpha,\beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0,f(c_0))$ της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από το σημείο $A(c,0)$.

(Bacc. Rouen)

Λύση:

i) Η F είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, γιατί για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $x-c \neq 0$, αφού $c \notin [\alpha,\beta]$.

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, αφού είναι πηλίκο συναρτήσεων συνεχών στο διάστημα αυτό.

Η F ως πηλίκο συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β), είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Έχουμε:

$$F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha-c}=0=\frac{f(\beta)}{\beta-c}=F(\beta) \quad (1)$$

Άρα το θεώρημα του Rolle ισχύει για την F στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Έτσι υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0)=0$.

ii) Από το (i) έχουμε ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε για τη συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ να ισχύει:

* Αν $f=f'$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε $f(x)=ce^x$ όπου c σταθερά.

$$F'(c_0)=0. \quad \text{Είναι } F'(x)=\frac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$$

επομένως $\dfrac{f'(c_0)(c_0-c)-f(c_0)}{(c_0-c)^2}=0$ ή $f(c_0)=f'(c_0)(c_0-c)$ (2)

Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(c_0,f(c_0))$ δίνεται από τη σχέση:

$$\psi-f(c_0)=f'(c_0)(x-c_0) \quad (3)$$

Για να περνά η (3) από το σημείο $(c,0)$ πρέπει:

$$0-f(c_0)=f'(c_0)(c-c_0) \quad \text{ή} \quad f(c_0)=f'(c_0)(c_0-c)$$

που ισχύει λόγω της (2).

*****5. α) i) Να δειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)+f(x)=0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση F για την οποία $F(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2$ είναι σταθερή.**

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-f'(0)\eta\mu x-f(0)\sigma\upsilon\nu x$ (2) Να δειχθεί ότι: $[g'(x)]^2+[g(x)]^2=$σταθερό.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f''(x)>0$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να δειχθεί ότι:

$$f(x)-f(\alpha)<(x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

(Bac. Lille)

Λύση:

α) i) Είναι $f''(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x)+2f'(x)f(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [[f'(x)]^2+f^2(x)]'=0 \Leftrightarrow [f'(x)]^2+f^2(x)=c.$$

ii) Έχουμε $g'(x)=f'(x)-f'(0)\sigma\upsilon\nu x+f(0)\eta\mu x \Rightarrow g''(x)=f''(x)+f'(0)\eta\mu x+$ $+f(0)\sigma\upsilon\nu x$ (3).

Έτσι είναι $g''(x)+g(x) \overset{(2),(3)}{=\!=} f''(x)+f(x)+0 \overset{(1)}{=\!=} 0$.

Επομένως σύμφωνα με το (i) ερώτημα η συνάρτηση $h(x)=[g'(x)]^2+[g(x)]^2$ είναι σταθερή.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1)
Για την g ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)=g(\beta)=0$).

'Αρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος που $g'(\xi)=0$. Η (1) δίνει:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow g''(x)=f''(x) > 0$$

για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. 'Αρα η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα, το σημείο μηδενισμού ξ είναι ένα και μόνο και ακόμα θα είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\xi]$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x \in [\xi,\beta]$. Τότε όμως η g θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi,\beta]$. Επειδή είναι $g(\alpha)=0$ θα είναι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\xi]$. Επειδή είναι $g(\beta)=0$ θα είναι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [\xi,\beta)$. 'Αρα είναι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Η (1) επειδή $g(x) < 0$, δίνει:

$$f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < 0 \Leftrightarrow f(x)-f(\alpha) < (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

****6. Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραβολών:**

$$\psi=f(x)=(\mu-2)x^2+(\mu-3)x+2(1-\mu),\ \mu \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

i) Να δειχθεί ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ οι παραβολές περνούν από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να βρεθούν.

ii) Να μελετηθεί η f ως προς τα ακρότατα και τη μονοτονία.

iii) Να προσδιορισθεί ο μ, ώστε η f να παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο σημείο $x_0=5$.

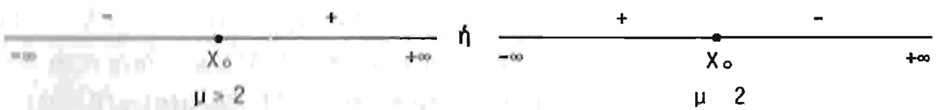
iv) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των παραβολών.

Λύση:

i) 'Εστω $M(x_0,\psi_0)$ ένα σταθερό σημείο από το οποίο περνούν οι παραβολές, τότε είναι $\psi_0=(\mu-2)x_0^2+(\mu-3)x_0+2(1-\mu)$ ή $(x_0^2+x_0-2)\mu+(-2x_0^2-3x_0+2-\psi_0)=0$ (2) για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Η (2) δίνει $\begin{cases} x_0^2+x_0-2=0 \\ -2x_0^2-3x_0+2-\psi_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0=1,\ \psi_0=-3) \\ \text{ή} \\ (x_0=-2,\ \psi_0=0) \end{cases}$

ii) Είναι $f'(x)=2(\mu-2)x+(\mu-3)$. Ρίζα της $f'(x)$ είναι η $x_0=-\frac{\mu-3}{2(\mu-2)}$, $(\mu\neq 2)$. Το πρόσημο της $f'(x)$ είναι το επόμενο ανάλογα αν $\mu-2 > 0$ ή $\mu-2 < 0$.



Από το πρόσημο προκύπτει εύκολα η μονοτονία και το ακρότατο.

iii) Είναι $5=-\frac{\mu-3}{2(\mu-2)}$ (3). Λύνοντας την (3) προσδιορίζουμε εύκολα την ζητούμενη τιμή του μ.'

iv) Είναι γνωστό ότι η παραβολή $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq 0)$ έχει κορυφή το σημείο $M\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. 'Ετσι η κορυφή της (1) έχει συντεταγμένες:

$$x=-\frac{\mu-3}{2(\mu-2)}\ ,\quad \psi=-\frac{(\mu-3)^2-4(\mu-2)2(1-\mu)}{4(\mu-2)}$$

Μεταξύ των τελευταίων εξισώσεων κάνουμε απαλοιφή του μ οπότε προκύπτει η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

****7. Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με την f'' συνεχή στο $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ και $f'(0)=0$.**

Δίνεται και η συνάρτηση g με:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ f'(0), & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι:

i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) Η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

('Ασκηση σύνθεσης)

Λύση:

i) Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. 'Αρα η $\frac{f(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$. Επομένως η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$. Θα εξετάσουμε αν η g παραγωγίζεται στο 0. 'Εχουμε:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

$$=\frac{1}{2}f''(0).$$

Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, υπάρχει η $f''(0)$, άρα υπάρχει και η $g'(0)$. 'Ετσι η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$.

ii) Έχουμε $g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και από ερώτημα (i) είναι $g'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$. Άρα

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} & \text{αν } x\neq 0\\ \frac{1}{2}f''(0) & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ (διότι οι συναρτήσεις f', f είναι συνεχείς). Συνέχεια στο 0: Είναι

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

$$-\left(\frac{0}{0}\right)=f''(0)-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=f''(0)-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=$$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0).$$

Άρα η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. α) Να δειχθεί ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f(x) έχει την ρίζα ρ με πολλαπλότητα κ, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ τότε η παράγωγός της έχει την ίδια ρίζα με πολλαπλότητα κ-1.

β) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x)=x^5+4x^3+5x+27$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια ρίζα πραγματική και τέσσερις μιγαδικές*.

(Bacc. Strasbourg)

Λύση:

α) Επειδή ρ είναι ρίζα της f(x) με πολλαπλότητα κ θα ισχύει:

$$f(x)=(x-\rho)^{\kappa}\pi(x) \quad (1) \quad \pi(\rho)\neq 0.$$

Η (1) με παραγώγιση δίνει:

$$f'(x)=\kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\pi(x)+(x-\rho)^{\kappa}\pi'(x)=(x-\rho)^{\kappa-1}\underbrace{[\kappa\pi(x)+(x-\rho)\pi'(x)]}_{\sigma(x)}$$

$$=(x-\rho)^{\kappa-1}\sigma(x)$$

* Η άσκηση αυτή που περιέχεται στην Μαθηματική Ανάλυση του Ο.Ε.Δ.Β του 1991 δόθηκε ως θέμα με άλλους συντελεστές στο Bacc. του Strasbourg το 1979

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει το ζητούμενο εφ' όσον είναι:

$$\sigma(\rho)=\kappa\pi(\rho)+(\rho-\rho)\pi'(\rho)=\kappa\pi(\rho)\neq 0$$

β) Επειδή το πολυώνυμο f(x) είναι περιττού βαθμού, θα έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα ρ_1. Επίσης έχουμε $f'(x)=5x^4+12x^2+5$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)>0 \qquad (1)$$

I) Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κι άλλη πραγματική ρίζα ρ_2 της f(x)=0 και είναι έστω $\rho_1<\rho_2$. Τότε για τη συνάρτηση f έχουμε:

1) Είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$.
2) Είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).
3) Είναι $f(\rho_1)=0=f(\rho_2)$.

Επομένως, σύμφωνα με το θ. του Rolle θα υπάρχει $\rho_3 \in (\rho_1,\rho_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\rho_3)=0$. Αυτό όμως, λόγω της (1), είναι άτοπο.

Έτσι λοιπόν αποκλείεται η f(x)=0 να έχει διαφορετικές πραγματικές ρίζες περισσότερες της μίας.

II) Έστω ότι η f(x)=0 έχει την ρίζα ρ με πολλαπλότητα ν (ν=2,3,4,5). Τότε θα είναι $f(x)=(x-\rho)^{\nu}\pi(x)$ (2) με $\pi(\rho)\neq 0$. Η (2) γράφεται:

$$f'(x)=\nu(x-\rho)^{\nu-1}\pi(x)+(x-\rho)^{\nu}\pi'(x)$$

$$\text{ή} \quad f'(x)=(x-\rho)^{\nu-1}[\nu\pi(x)+(x-\rho)\pi'(x)] \Rightarrow f'(\rho)=0$$

που είναι άτοπο (λόγω της (1)).

Άρα η f(x)=0 έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

9. Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x)=\frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.**

Λύση:

Έχουμε $\Delta=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $\varphi(0)=0$, η γραφική παράσταση της φ θα διέρχεται από το σημείο O(0,0).

Η φ είναι περιττή, γιατί για κάθε $x\in\Delta$ είναι $\varphi(-x)=\frac{(-x)(x^2+1)}{x^2-1}=-\varphi(x)$. Συνεπώς αρκεί να τη μελετήσουμε στο $\Delta'=\mathbb{R}_+\cap\Delta=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $\varphi'(x)=\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

Το τριώνυμο x^4-4x^2-1 έχει πραγματικές ρίζες τις $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ και $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Άρα στο Δ' είναι: $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(\sqrt{2+\sqrt{5}},+\infty)$ και $\varphi'(x)<0$

για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,\sqrt{2+\sqrt{5}})$. Συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,\sqrt{2+\sqrt{5}})$. Επίσης είναι $\varphi''(x)=\dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

Η φ'' έχει πραγματική ρίζα το 0. Έτσι θα είναι $\varphi''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $\varphi''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της φ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,1)$ και άνω στο $(1,+\infty)$.

Επειδή $\varphi''(\sqrt{2+\sqrt{5}})>0$, η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Έχουμε ακόμη:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=-\infty$. Άρα η γραφική παράσταση της φ στο Δ' έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-x]=0$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=x$.

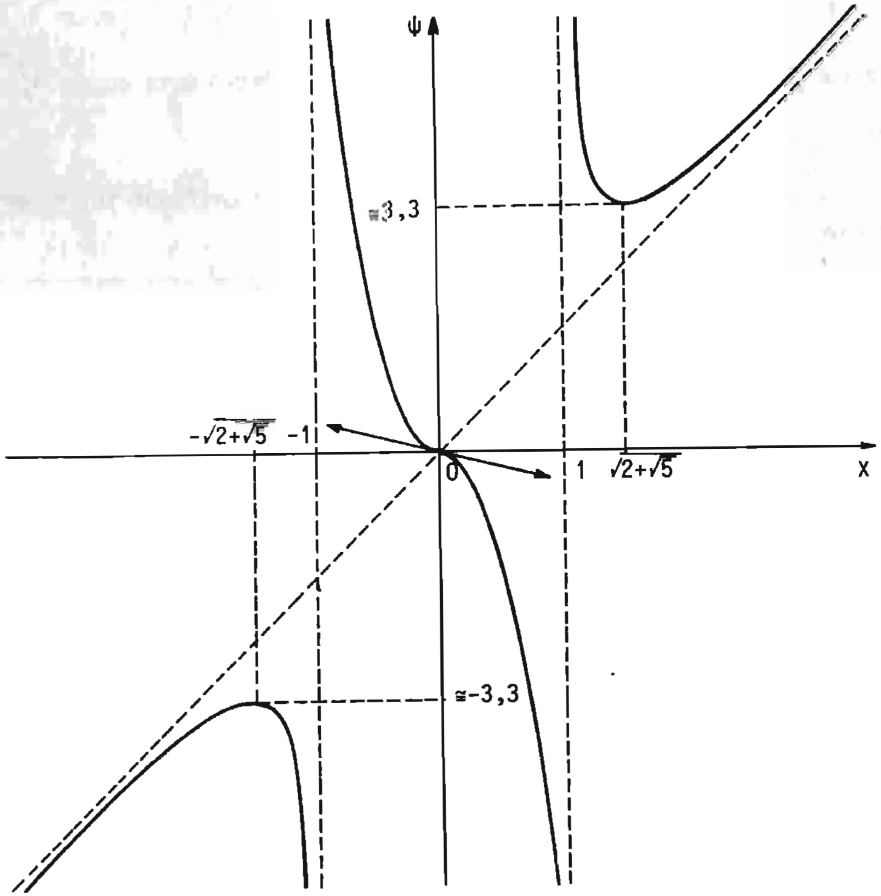
Επειδή η γραφική παράσταση της φ είναι συμμετρική ως προς το 0 και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,1)$, θα στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-1,0]$. Επιπλέον επειδή $\varphi''(0)=0$ η φ παρουσιάζει καμπή στο 0.

Επίσης, επειδή η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, θα παρουσιάζει μέγιστο στο $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Τέλος, αφού η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$, θα έχει ασύμπτωτη και την ευθεία $x=-1$.

Έτσι έχουμε την επόμενη γραφική παράσταση της f:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
φ'								$-$		$-$	0	$+$	
φ''							0	$-$		$+$		$+$	
φ	$-\infty$	↗	μ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	κ (0)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	ε	↗	$+\infty$



***10. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση t με:

$$t(x)=\frac{4}{3}\,\text{συν}^3 x$$

(Bac. Limoge)

Λύση:

Επειδή η συνάρτηση t είναι άρτια και περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη της στο διάστημα [0,π].

Έχουμε: $t'(x)=\frac{4}{3}\cdot 3\sigma\upsilon\nu^2 x(-\eta\mu x)=-4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x$

Η t' έχει στο [0,π] ρίζες τις 0, $\frac{\pi}{2}$ και π.

Είναι: $t'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και συνεπώς η t είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

Επίσης έχουμε:

$$t''(x)=-4[\sigma\upsilon\nu^3 x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x)]=-12\sigma\upsilon\nu x\left(\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Επειδή $0<\sqrt{\frac{2}{3}}<1$, υπάρχει $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Τότε η t'' έχει ρίζες τις φ_0, $\frac{\pi}{2}$ και $\pi-\varphi_0$.

Για τον καθορισμό του προσήμου της t'', καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προκύπτει ότι:

$t''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,\varphi_0)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi-\varphi_0\right)$

$t''(x)>0$, για κάθε $x\in\left(\varphi_0,\frac{\pi}{2}\right)\cup(\pi-\varphi_0,\pi)$

x	0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi_0$		π
συνx		+		+	0	-		-	
$\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{\frac{2}{3}}$		+	0	-		-		-	
$\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{\frac{2}{3}}$		+		+		+	0	-	
t''		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η γραφική παράσταση της t στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(0,\varphi_0)$, $\left(\frac{\pi}{2},\pi-\varphi_0\right)$ και άνω στα διαστήματα $\left(\varphi_0,\frac{\pi}{2}\right)$, $(\pi-\varphi_0,\pi)$, οπότε η t παρουσιάζει καμπή στα σημεία φ_0, $\frac{\pi}{2}$ και $\pi-\varphi_0$. Επειδή

$t''(0)=-4<0$, η t παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, το $t(0)=\frac{4}{3}$

$t''(\pi)=4>0$, η t παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π, το $t(\pi)=-\frac{4}{3}$

Επειδή η t είναι άρτια (οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ'ψ), θα παρουσιάζει καμπή και στα σημεία $-\varphi_0$, $-\frac{\pi}{2}$, $-(\pi-\varphi_0)$ και ελάχιστο στο σημείο $-\pi$.

Τέλος, αφού η t είναι και περιοδική με περίοδο 2π, θα παρουσιάζει γενικότερα:

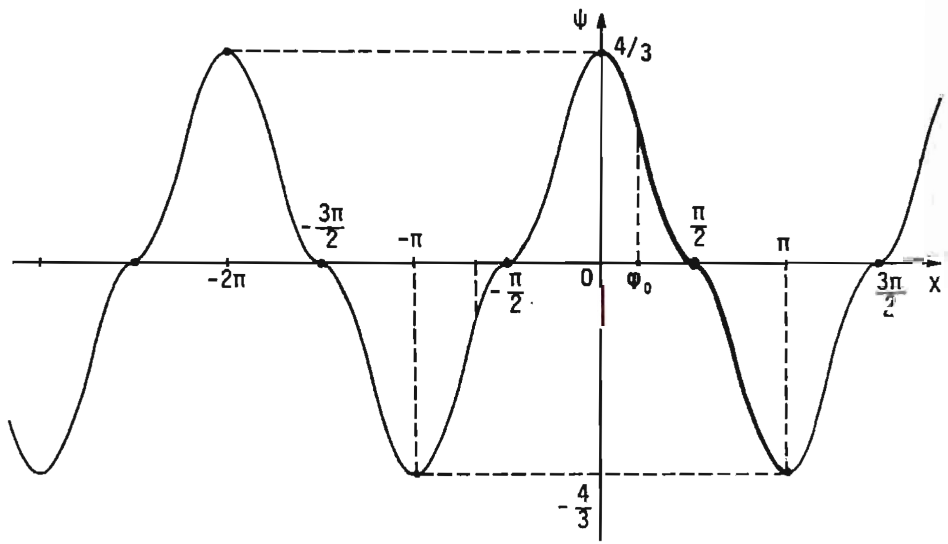
καμπή στα σημεία $\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ και $\kappa\pi\pm\varphi_0$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$

μέγιστο στα σημεία $2\kappa\pi$

ελάχιστο στα σημεία $2\kappa\pi+\pi$

Έχουμε έτσι τον επόμενο πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της t·

x	-π		-(π-φ₀)		$-\frac{\pi}{2}$		$-\varphi_0$		0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi_0$		π
t'									0	-		-	0	-		-	0
t''									-4	-	0	+	0	-	0	+	4
t	$-\frac{4}{3}$ ε	↗	κ	↗	0 κ	↗	κ	↗	$\frac{4}{3}$ μ	↘	κ	↘	0 κ	↘	κ	↘	$-\frac{4}{3}$ ε



***11. i) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ στρέφει τα κοίλα άνω τότε είναι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. Ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω τότε είναι: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

ii) Να δειχθεί ότι $2\sqrt{e^{x+\psi}} \le e^{x}+e^{\psi}$ για κάθε $x,\psi \in \mathbb{R}$.

(Partie du Bac. E, Rouen)

Λύση:

i) Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω, θα είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα:

$$f(\alpha)+f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

ή $$f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq 0 \qquad (1)$$

Αλλά σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιοι ώστε:

$$f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{2}f'(\xi_1) \text{ και } f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_2)$$

Έτσι η (1) γράφεται:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)] \geq 0$$

Υπάρχει όμως (θεώρημα μέσης τιμής) $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=(\xi_2-\xi_1)f''(\xi)$$

οπότε:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}(\xi_2-\xi_1)f''(\xi) \geq 0 \qquad (2)$$

Επειδή $\frac{\beta-\alpha}{2} > 0$, $\xi_2-\xi_1 > 0$ και $f''(\xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in (\alpha,\beta)$ η (2) είναι αληθής. Επομένως είναι αληθής και η $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=e^x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

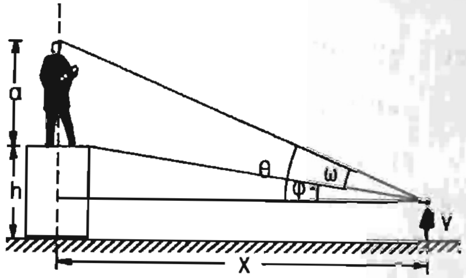
Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω. Έτσι σύμφωνα με το (i) ερώτημα θα είναι:

$$e^{\frac{x+\psi}{2}} \leq \frac{e^x+e^{\psi}}{2} \quad \text{ή} \quad 2\sqrt{e^{x+\psi}} \leq e^x+e^{\psi}$$

**12. Σε ένα βάθρο ύψους h έχει τοποθετηθεί ένα άγαλμα ύψους α. Σε ποια οριζόντια απόσταση x πρέπει να τοποθετηθεί παρατηρητής ύψους γ με γ < h ώστε να βλέπει το άγαλμα με τη μέγιστη γωνία;

Λύση:

Είναι ω=θ-φ και συνεπώς $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi\theta-\varepsilon\varphi\varphi}{1+\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi\varphi}$. Αλλά, αν θέσουμε h-γ=β, είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha+\beta}{x}$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{x}$.



Έτσι θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{\alpha+\beta}{x}-\frac{\beta}{x}}{1+\frac{(\alpha+\beta)\beta}{x^2}} = \frac{\alpha x}{x^2+\beta(\alpha+\beta)}$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση εφαπτομένη είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η μέγιστη τιμή του ω θα αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της εφω.

Αρκεί λοιπόν να βρούμε, αν υπάρχει, το μέγιστο της συνάρτησης: $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ με:

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x^2+\beta(\alpha+\beta)}$$

Έχουμε: $$f'(x)=\alpha\frac{\beta(\alpha+\beta)-x^2}{[x^2+\beta(\alpha+\beta)]^2}$$

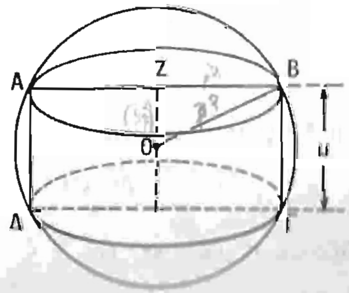
Η f' μηδενίζεται για $x_0=\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}$, είναι θετική για κάθε $x \in (0,\sqrt{\beta(\alpha+\beta)})$ και αρνητική για κάθε $x \in (\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}, +\infty)$. Άρα η f θα έχει μέγιστο στο σημείο $x_0=\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}=\sqrt{(h-\gamma)(\alpha+h-\gamma)}$.

13. α) Σε σφαίρα ακτίνας R=3 cm, να εγγραφεί ορθός κύλινδρος που να έχει τον μέγιστο όγκο.

β) Σε ημικύκλιο ακτίνας ρ=2 cm, να εγγραφεί τραπέζιο που να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Λύση:

α) Έστω ΑΒΓΔ ο εγγεγραμμένος στη σφαίρα (O, 3 cm) κύλινδρος, με ακτίνα βάσης ρ και ύψους υ (σχ.β). Ο όγκος του κυλίνδρου θα είναι $V=\pi\rho^2 u$. Επειδή όμως $\rho^2=3^2-\frac{u^2}{4}=\frac{4\cdot 3^2-u^2}{4}$ (αφού το τρίγωνο ΖΟΒ είναι ορθογώνιο) θα έχουμε:



$$V(u)=\pi\frac{36-u^2}{4}u=\frac{\pi}{4}(36u-u^3)$$

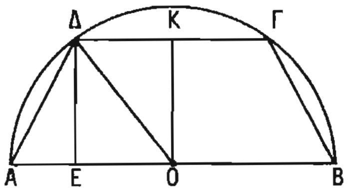
Είναι $V'(u)=\frac{\pi}{4}(36-3u^2)$ και $V''(u)=-\frac{3\pi u}{2}$

Επειδή $V'(u)\ 0 \iff 3u^2=36 \iff u^2=12 \iff u=2\sqrt{3}$ cm

και $V''(2\sqrt{3})=-\frac{3\pi\cdot 2\sqrt{3}}{2}=-3\pi\sqrt{3}<0$, ο κύλινδρος θα έχει μέγιστο όγκο, όταν $u=2\sqrt{3}$ cm.

β) Έστω x με $0<x<2$ το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ και Ε το εμβαδόν του. Έχουμε:

$$ΔΓ=2ΔΚ=2\sqrt{4-x^2}$$



και $E(x)=x\,\frac{4+2\sqrt{4-x^2}}{2}=x(2+\sqrt{4-x^2})$

Αλλά: $E'(x)=\frac{2\sqrt{4-x^2}+4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ οπότε, για $x\in(0,2)$ έχουμε:

$$E'(x)=0 \iff 2\sqrt{4-x^2}+4-2x^2=0 \iff x^2-2=\sqrt{4-x^2}$$

$$\iff \begin{cases} x^4-4x^2+4=4-x^2 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4-3x^2=0 \\ x\geq\sqrt{2} \end{cases} \iff x=\sqrt{3}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει στο διάστημα $(0,2)$ μόνο τη ρίζα $x=\sqrt{3}$. Ακόμη είναι:

$$E''(x)=\frac{x(2x^2-12)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \quad \text{και } E''(\sqrt{3})<0$$

Άρα για $x_0=\sqrt{3}$ έχουμε μέγιστο.

Συνεπώς το τραπέζιο με το μέγιστο εμβαδό είναι εκείνο που έχει:

$ΔΓ=2\sqrt{4-(\sqrt{3})^3}=2$ cm και $ΒΓ=ΑΔ=\sqrt{(ΑΕ)^2+(ΔΕ)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ cm

**14. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{συν^2x}{συνx-\frac{1}{2}} \quad \text{στο σύνολο } \left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$$

(Bac. D, Montreal et New York)

Λύση:

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο

$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$$

Εξετάζουμε το πρόσημο της f'. Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{2συνx(-ημx)(συνx-\frac{1}{2})-(-ημx)συν^2x}{\left(συνx-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{ημxσυνx(1-2συνx+συνx)}{\frac{(2συνx-1)^2}{4}}$$

$$=\frac{4ημxσυνx(1-συνx)}{(2συνx-1)^2}$$

Είναι $f'(0)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(\pi)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. Επειδή

$$f'(x)>0 \iff x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$$

η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left(0,\frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)<0 \iff x\in\left(-\frac{\pi}{3},0\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθενα από τα διαστήματα

$$\left(-\frac{\pi}{3},0\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \text{ και } \left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$$

Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$, ίσο με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$, και τοπικό ελάχιστο στα σημεία 0 και π, ίσο με $f(0)=2$ και $f(\pi)=-\frac{2}{3}$ αντιστοίχως.

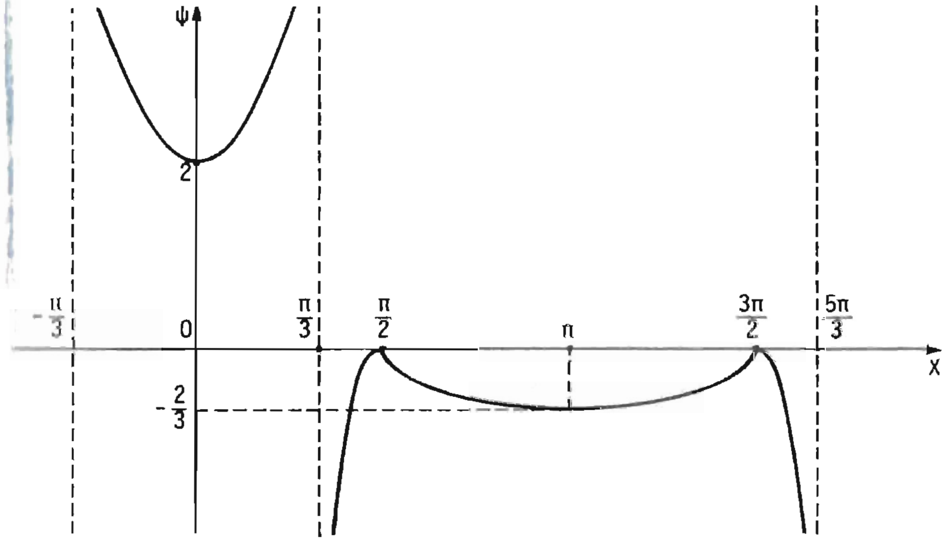
Τέλος, επειδή $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{3}^-}f(x)=-\infty$

οι ευθείες $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$ και $x=\frac{5\pi}{3}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$
f'		-	0	+	‖	+	0	-	0	+	0	-	‖
f	$+\infty$	↘	2 (ε)	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0 (μ)	↘	$-\frac{2}{3}$ (ε)	↗	0 (μ)	↘	$-\infty$ ‖



****15.** i) Να δειχθεί ότι $\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} < e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}} < \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ii) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=1$

(Ασκηση σύνθεσης)*

Λύση:

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{1/x}$, $x\in(0,+\infty)$. Η f στο διάστημα $[x,\ x+1]$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής. Άρα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$ τέτοιος που:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=e^{\frac{1}{x+1}}-e^{1/x} \qquad (1)$$

Είναι όμως $f'(x)=e^{1/x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

* Η λύση αυτή δόθηκε από τον μαθηματικό κ. **Κώστα Κακνιoσάκη**.

Άρα $f'(\xi)=-\dfrac{e^{1/\xi}}{\xi^2}$ (2). Η (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$-\frac{e^{1/\xi}}{\xi^2}=e^{\frac{1}{x+1}}-e^{1/x} \Leftrightarrow \frac{e^{1/\xi}}{\xi^2}=e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}} \qquad (3)$$

Είναι όμως $x<\xi<x+1$. Άρα

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x}\\ e^{\frac{1}{x+1}}<e^{1/\xi}<e^{1/x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}<\dfrac{1}{\xi^2}<\dfrac{1}{x^2}\\ e^{\frac{1}{x+1}}<e^{1/\xi}<e^{1/x}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}<\frac{e^{1/\xi}}{\xi^2}<\frac{e^{1/x}}{x^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}<e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}}<\frac{e^{1/x}}{x^2} \qquad (4)$$

ii) Η (4) γράφεται $\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}x^2<x^2\left(e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)<e^{1/x}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=1\cdot1=1$ έπεται

από την (4) (κριτήριο παρεμβολής) ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{1/x}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=1.$$

****16.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$ με $f(0)=2$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Αν ισχύει $\begin{vmatrix} f(x) & 0 & -f'(x)\\ -f'(x) & 0 & f(x)\\ f(x) & -f'(x) & 0\end{vmatrix}=0$ (1), να δειχθεί ότι:

i) $f(1)=\dfrac{2}{e}$, ή $f(1)=2$ ή $f(1)=2e$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

iii) $f'(x)=-2e^{-x}$ ή $f'(x)=0$ ή $f'(x)=2e^{x}$

(Bac. Orleans)

Λύση:

Θα εξετάσουμε μήπως είναι δυνατόν να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης από τα δεδομένα της άσκησης.

Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης προκύπτει:

$$f'(x)\begin{vmatrix} f(x) & -f'(x) \\ -f'(x) & f(x) \end{vmatrix}=0 \text{ ή } f'(x)[[f(x)]^2-[f'(x)]^2]=0$$

$$\text{ή } f'(x)[f(x)-f'(x)][f(x)+f'(x)]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=0 & (2) \\ f'(x)=f(x) & (3) \\ f'(x)=-f(x) & (4) \end{cases}$$

Η (2) δηλώνει ότι η f είναι σταθερή στο IR. Άρα $f(x)=c$ και αφού $f(0)=2$ θα είναι $f(x)=2$.

Η (3) δηλώνει ότι $f(x)=ce^x$ και αφού $f(0)=2$ θα είναι $f(0)=ce^0$ ή $2=ce^0$ ή $2=c$. Άρα $f(x)=2e^x$.

Η (4) δηλώνει ότι $f(x)=ce^{-x}$ και αφού $f(0)=2$ θα είναι $f(x)=2e^{-x}$.

Έτσι λοιπόν ο τύπος της f είναι $f(x)=2$ ή $f(x)=2e^x$ ή $f(x)=2e^{-x}$.

i) Είναι $f(1)=2$ ή $f(1)=2e^1=2e$ ή $f(1)=2e^{-1}=\frac{2}{e}$.

ii) Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2=2$ ή $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^x=+\infty$ ή

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$.

iii) Είναι $f(x)=2 \Rightarrow f'(x)=0$ ή $f(x)=2e^x \Rightarrow f'(x)=2e^x$ ή $f(x)=2e^{-x} \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x)=-2e^{-x}$.

****17. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο IR και για την οποία ισχύει $f(x+\psi)=e^x f(\psi)+e^{\psi} f(x)$ (1) για κάθε x ∈ IR και f'(0)=0. Να δειχθεί ότι:**

i) $f(0)=0$

ii) $f(3x)=3^{2x} f(x)$ για κάθε x ∈ IR.

iii) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x}=2$.

iv) $f'(x)=2e^x+f(x)$

(Bacc. Amiens)

Λύση:

i) Η (1) για x=0 δίνει $f(\psi)=e^0 f(\psi)+e^{\psi} f(0) \Leftrightarrow f(\psi)=f(\psi)+e^{\psi} f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\psi} f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

ii) Η (1) για ψ=x δίνει $f(2x)=e^x f(x)+e^x f(x) \Leftrightarrow f(2x)=2e^x f(x)$ (2).

Η (1) για ψ=2x δίνει $f(3x)=e^x f(2x)+e^{2x} f(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} f(3x)=e^x 2e^x f(x)+e^{2x} f(x)$ $\Rightarrow f(3x)=2e^{2x} f(x)+e^{2x} f(x) \Rightarrow f(3x)=3e^{2x} f(x)$.

iii) Είναι $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$.

Είναι ακόμα $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to0}\frac{2e^x f(x)}{2x}=\lim_{x\to0} e^x \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=e^0\cdot2=2$.

iv) Είναι $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to0}\frac{e^x f(h)+e^h f(x)-f(x)}{h}=$ $=\lim_{h\to0} e^x\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0} f(x)\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+f(x)\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot2+f(x)\cdot1=$ $=2e^x+f(x)$ (Ισχύει ότι $\lim_{\omega\to0}\frac{e^{\omega}-1}{\omega}=1$).

*****18. Θεωρούμε την επί συνάρτηση f:[0,1] ⟶ [0,1], που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με f'(x)≠1 για κάθε x ∈ [0,1]. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο x_0 ∈ [0,1] τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.**

(θέμα διαγωνισμού)

Λύση:

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο [0,1]. Η g είναι συνεχής και ακόμα $g(0)g(1)=[f(0)-0][f(1)-1]=f(0)[f(1)-1] \leq 0$* δηλαδή $g(0)\cdot g(1)\leq 0$.

i) Έστω $g(0)\cdot g(1)=0$ τότε θα είναι $g(0)=0$ ή $g(1)=0$. Επομένως το ζητούμενο x θα είναι το 0 ή το 1 και όχι και οι δυο. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $f(0)=0$, και $f(1)=1$ σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής που ισχύει για την f στο [0,1] θα είχαμε: για ένα ξ ∈ (0,1): $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1$ που είναι άτοπο, εφ'όσον f'(x)≠1 για κάθε x ∈ [0,1].

ii) Έστω $g(0)\cdot g(1)<0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈ (0,1)(Bolzano) με $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερο σημείο x_0' τέτοιο που x_0' ∈ [0,1] και $f(x_0')=x_0'$. Έστω $x_0'<x_0$. Για την f ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής στο $[x_0', x_0]$. Άρα υπάρχει ξ ∈ (x_0', x_0) με $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(x_0')}{x_0-x_0'}=\frac{x_0-x_0'}{x_0-x_0'}=1$ που είναι άτοπο εφ'όσον f'(x)≠1 για κάθε x ∈ [0,1].

* Είναι $0\leq f(x)\leq 1$. Άρα $0\leq f(0)$ και $f(1)\leq 1 \Leftrightarrow f(1)-1\leq 0$.

***19. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$-f''(x)+xf'(x)=\alpha^x \quad (1) \quad (\alpha > 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=x_0$ τότε το ακρότατο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει η τρίτης τάξεως παράγωγος της f στο $\mathbb{R}$ και ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x=0. Να δειχθεί ότι $f'''(0)<0$

(Bac. Poitiers)

Λύση:

i) Η (1) για $x=x_0$ δίνει: $-f''(x_0)+x_0f'(x_0)=\alpha^{x_0}$ (2).

Η (2) επειδή $f'(x_0)=0$ δίνει $-f''(x_0)=\alpha^{x_0}$ ή $f''(x_0)=-\alpha^{x_0} < 0$. Επειδή $f''(x_0) < 0$ το τοπικό ακρότατο είναι τοπικό μέγιστο.

ii) Η (1) παραγωγίζοντάς την δίνει:

$$-f'''(x)+f'(x)+xf''(x)=\alpha^x\ln\alpha \overset{x=0}{\Longrightarrow} -f'''(0)+f'(0)+0f''(0)=\alpha^0\ln\alpha \quad ή$$

$-f'''(0) \overset{*}{=} \ln\alpha$ ή $f'''(0)=-\ln\alpha < 0$ (είναι $\ln\alpha > 0$ εφ'όσον $\alpha > 1$).

***20. Θεωρούμε την συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο [0,2] και ακόμα f(1)=3, $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in (0,2)$.

i) Να δειχθεί ότι $|f(x)-3| \leq 2$ για κάθε $x \in [0,1) \cup (1,2]$.

ii) Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη στο [0,2].

(Lycee Jean Giraudoux)

Λύση:

i) Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο διάστημα [x,1], $0 \leq x < 1$.

Άρα υπάρχει $x_0 \in (x,1)$ με $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ή

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-3}{x-1} \Rightarrow \left|\frac{f(x)-3}{x-1}\right|=|f'(x_0)| \leq 2 \Rightarrow \frac{|f(x)-3|}{|x-1|} \leq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x)-3| \leq 2|x-1| \leq 2$ (είναι $|x-1| \leq 1$). Άρα $|f(x)-3| \leq 2$ για κάθε $x \in [0,1)$. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|f(x)-3| \leq 2$ για κάθε $x \in (1,2]$ (κάνουμε εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα [1,x], $1 < x \leq 2$).

ii) Είναι $|f(x)-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2+3 \leq f(x) \leq 2+3 \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in [0,1) \cup (1,2]$. Επειδή είναι και f(1)=3, έχουμε $1 \leq f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in [0,2]$.

* Είναι $f'(0)=0$ διότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x=0.

***21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f(x)e^{f(x)}=x$ (1) για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι:

i) Αν η f είναι μονότονη τότε είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x}=1$

(Lycee Ampere)

Λύση:

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2 \in [0,+\infty)$ ώστε για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ Είναι $x \geq 0$, $e^{f(x)} > 0$. Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Έχουμε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (1) \quad \text{και} \quad e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)} \quad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν: $f(x_1)e^{f(x_1)} \geq f(x_2)e^{f(x_2)} \overset{(1)}{=\!=} x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία (x_ν) με $x_\nu \in [0,+\infty)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $x_\nu \longrightarrow +\infty$. Δείξαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα έχουμε $x_\nu \leq x_{\nu+1} \Rightarrow f(x_\nu) \leq f(x_{\nu+1}) \Rightarrow f(x_\nu)$ αύξουσα.

Η $f(x_\nu)$ είναι μη φραγμένη άνω. Πράγματι αν είχαμε $f(x_\nu) \leq \theta$ (3) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\theta > 0$, θα ήταν και $e^{f(x_\nu)} \leq e^\theta$ (4).

Οι (3) και (4) δίνουν $f(x_\nu)e^{f(x_\nu)} \leq \theta e^\theta \overset{(1)}{\Longrightarrow} x_\nu \leq \theta e^\theta \Rightarrow$ η (x_ν) φραγμένη που είναι άτοπο. Η $f(x_\nu)$ ως αύξουσα και μη φραγμένη άνω απειρίζεται θετικά. Επειδή $\lim f(x_\nu)=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

iii) Είναι $f(x)e^{f(x)}=x \Leftrightarrow \ln[f(x)e^{f(x)}]=\ln x \Leftrightarrow \ln f(x)+\ln e^{f(x)}=\ln x$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)+f(x)\ln e=\ln x \Leftrightarrow \ln f(x)+f(x)=\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{f(x)}=\frac{\ln f(x)}{f(x)}+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=1+\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln f(x)]'}{f'(x)}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{f(x)}f'(x)}{f'(x)}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=1+0=1.$$

***22. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1x+\alpha_0$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha_\nu \neq 0$. Έστω $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu$ οι πραγματικές απλές ρίζες της. Να δειχθεί ότι:

i) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\dots+\dfrac{1}{x-\rho_\nu}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu\}$

ii) Οι απλές ρίζες του $f(x)$ δεν είναι ρίζες του $f'(x)$

iii) Το πολυώνυμο $g(x)=f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε)

Λύση:

i) Είναι $f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$ και

$$f'(x)=\alpha_\nu(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu)+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu)+\cdots+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$$

Επομένως είναι: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-\rho_\nu}$ (1)

ii) 'Εστω ρ_i μια απλή ρίζα του $f(x)$ $(i=1,2,3,\ldots,\nu)$ τότε θα έχουμε:

$$f'(\rho_i)=\alpha_\nu(\rho_i-\rho_2)(\rho_i-\rho_3)\ldots(\rho_i-\rho_\nu)+\alpha_\nu(\rho_i-\rho_1)(\rho_i-\rho_3)\ldots(\rho_i-\rho_\nu)+\cdots+\alpha_\nu(\rho_i-\rho_1)(\rho_i-\rho_2)\ldots(\rho_i-\rho_{\nu-1})\neq 0$$

εφ'όσον όλοι οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται εκτός από ένα.

iii) Θα δείξουμε πρώτα ότι το $g(x)$ δεν έχει ως ρίζες τις ρίζες του $f(x)$. 'Εστω ρ_i μια (απλή) ρίζα του $f(x)$. 'Εχουμε:

$g(\rho_i)=f''(\rho_i)f(\rho_i)-[f'(\rho_i)]^2=f''(\rho_i)\cdot 0-[f'(\rho_i)]^2=-[f'(\rho_i)]^2\neq 0$ (διότι το ρ_i δεν είναι ρίζα του $f'(x)$).

Θα δείξουμε τώρα ότι το $g(x)$ δεν έχει ρίζες από το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu\}$. Η (1) με παραγώγιση δίνει:

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\left(\frac{1}{x-\rho_1}\right)'+\left(\frac{1}{x-\rho_2}\right)'+\cdots+\left(\frac{1}{x-\rho_\nu}\right)' \quad \text{ή}$$

$$\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-\rho_1)^2}-\frac{1}{(x-\rho_2)^2}-\cdots-\frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}<0 \Rightarrow \frac{g(x)}{f^2(x)}<0 \Rightarrow g(x)<0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu\}$.

Επομένως η συνάρτηση g δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

****23.** 'Εστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

ii) $f''=g''$ και

iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x\in\Delta$, $f(x)-g(x)=cx$ όπου $c\in\mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

(Γενικές εξετάσεις)

Λύση:

α) Επειδή $f''=g''$ υπάρχει σταθερή συνάρτηση στο Δ με τιμή $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει:

$$f'(x)=g'(x)+c$$

ή $\quad f'(x)-g'(x)=c$

ή $\quad (f-g)'(x)=c$

'Αρα: $(f-g)(x)=cx+c'$ (επειδή cx είναι μια παράγουσα της c)

ή $\quad f(x)-g(x)=cx+c'$ (1)

Η (1) για $x=0$ δίνει: $f(0)-g(0)=c' \Rightarrow c'=0$

'Ετσι η (1) δίνει: $f(x)-g(x)=cx$

β) 'Εχουμε:

$f(\rho_1)-g(\rho_1)=c\rho_1$ δηλ. $-g(\rho_1)=c\rho_1$

$f(\rho_2)-g(\rho_2)=c\rho_2$ δηλ. $-g(\rho_2)=c\rho_2$

'Αρα $\quad g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=c^2\rho_1\rho_2$

Αν $c=0$ τότε ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$.

Αν $c\neq 0$ τότε $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$ και κατά το θεώρημα Bolzano η g μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του (ρ_1,ρ_2).

'Αρα σε κάθε περίπτωση η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

****24. i)** **'Εστω η συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0\in\Delta$. Να αποδειχθεί:**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3$, $x\geq -3$, στο σημείο $x_0=-3$.

(Θέμα γενικών εξετάσεων)

Λύση:

i) Είναι $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)+x_0f(x_0)-x_0f(x_0)}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)(x-x_0)-x_0[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}-\frac{x_0[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[f(x_0)-x_0\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ άρα

$$A=f(x_0)-x_0\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

ii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-3,+\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{x+3}+x-3-(-6)}{x+3} = \lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{x+3}+x+3}{x+3} =$

$$=\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{x+3}+1\right)=\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}}+1=+\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση την $x=-3$ είναι εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με $x_0=-3$.

25. α) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:**

Είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β).

Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $g(x)\neq 0$ και για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ είναι $g'(x)\neq 0$, και ακόμα $f(\beta)g(\alpha)-f(\alpha)g(\beta)=0$. Να αποδειχθεί ότι:

i) Για την συνάρτηση F με $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης F με $F(x)=[f(x)]^x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Έστω $\alpha > 0$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης g με $g(x)=\alpha^{\sqrt{x^2+1}}$ $x \in \mathbb{R}$.

(θέμα γενικών εξετάσεων)

Λύση:

α) i) Το πεδίο ορισμού της F είναι το $[\alpha,\beta]$.

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) (ως πηλίκο συνεχών - παραγωγισίμων συναρτήσεων).

Ακόμη, επειδή $f(\beta)g(\alpha)-f(\alpha)g(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\beta)g(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)$, αν διαιρέσουμε με το $g(\alpha)g(\beta)\neq 0$ είναι $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \Leftrightarrow F(\alpha)=F(\beta)$, άρα εφαρμόζεται για την F το θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Αφού ισχύει για την F το θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(x_0)=0$ και επειδή:

$$F'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$ θα είναι:

$$F'(x_0)= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} =0,$$ οπότε

$$f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)g(x_0)=f(x_0)g'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{g(x_0)g'(x_0)\neq 0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

β) Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ για την F' έχουμε ότι:

$$F'(x)=\{[f(x)]^x\}'=[e^{x\ln f(x)}]' =e^{x\ln f(x)}\cdot[x\ln f(x)]' =$$

$$=[f(x)]^x\cdot\{(x)'\cdot\ln f(x)+x[\ln f(x)]'\}=[f(x)]^x\{\ln f(x)+ \frac{xf'(x)}{f(x)} \},\ x \in \mathbb{R}$$

γ) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $A=\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγισίμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων φ με $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}$ και h με $h(x)=\alpha^x$ με $g'(x)=(\alpha^{\sqrt{x^2+1}})'=\alpha^{\sqrt{x^2+1}} \ln\alpha\ (\sqrt{x^2+1})'=\alpha^{\sqrt{x^2+1}} \ln\alpha \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{\alpha^{\sqrt{x^2+1}}\ln\alpha\cdot x}{\sqrt{x^2+1}},\quad x \in \mathbb{R}.$$

26. α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\eta\mu x+2\sqrt{2}$**

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & \text{αν } x \in (-\infty,1) \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & \text{αν } x \in [1,+\infty) \end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=e.

(θέμα γενικών εξετάσεων)

Λύση:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $A=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu x- \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu x- \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0$ ή $\eta\mu x= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x= \frac{\pi}{2}$ ή $x= \frac{\pi}{4}$. Ισχύει ότι:

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow 2συνx\left(ημx-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \leftrightarrow \frac{π}{4} < x < \frac{π}{2}$$

και $$f'(x) < 0 \leftrightarrow 2συνx\left(ημx-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \leftrightarrow 0 \leq x < \frac{π}{4}$$ άρα:

1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{π}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{π}{4}, \frac{π}{2}\right]$.

2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x_0=\frac{π}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{π}{4}\right) = ημ^2\frac{π}{4} - \sqrt{2}ημ\frac{π}{4} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

3. Η f για x=0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(0)=2\sqrt{2}$ αφού $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{4}\right]$.

4. Η f για $x=\frac{π}{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{π}{2}\right)=1+\sqrt{2}$ διότι $f(x) \leq f\left(\frac{π}{2}\right)$ για κάθε $x \in \left[\frac{π}{4}, \frac{π}{2}\right]$.

β) Επειδή η συνάρτηση φ με $φ(x)=e^x$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$, συνεχής στο $(-\infty,1)$ θα είναι και η f με $f(x)=e^x-e$.

Η συνάρτηση σ με $σ(x)=\ln x$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ με $σ(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$, οπότε συνεχής στο $(1,+\infty)$ θα είναι και η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{\ln x}$, άρα η f με $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

Για τη συνέχεια της f στο $x_0=1$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(e^x-e)=0$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}=0$ και επειδή $f(1)=0$ θα είναι $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=1$ οπότε είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in [0,1)$ είναι $e^x < e^1 \leftrightarrow f(x)=e^x-e < 0$ και για κάθε $x \in [1,e]$ είναι $f(x) \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \geqslant 0$, άρα το ζητούμενο εμβαδό Ε θα είναι:

$$E=-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx=-\int_0^1 (e^x-e)dx+\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=$$

$$=-\int_0^1 e^x dx+e\int_0^1 dx+\int_1^e (\ln x)^{\frac{1}{2}}\cdot(\ln x)'dx=-[e^x]_0^1+e[x]_0^1+\left[\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2}\right]_1^e=$$

$$=-[e-1]+e(1-0)+\frac{2}{3}(\ln e)^{3/2}-\frac{2}{3}(\ln 1)^{3/2}=-e+1+e+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \text{ τ.μ.}$$

27. i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2αx^3}{3}+(α^2-2α+\frac{5}{2})x^2+(α^3+7)x-5α^2$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

ii) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} -2ημx & x \in \left(-\infty,-\frac{π}{2}\right] \\ αημx+β & x \in \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right) \\ συνx & x \in \left[\frac{π}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

Να προσδιοριστούν οι $α,β \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

(Lycee Voltaire)

Λύση:

i) Έχουμε $f'(x)=\frac{4}{3}x^3+2αx^2+(2α^2-4α+5)x+α^3+7$ και

$$f''(x)=4x^2+4αx+2α^2-4α+5.$$

Επειδή η διακρίνουσα Δ του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $f''(x)$ είναι $Δ=-16(α^2-4α+5) < 0$ δεδομένου ότι $α^2-4α+5=(α-2)^2+1 > 0$ για κάθε $α \in \mathbb{R}$, έπεται ότι: $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα αποκλείεται η γραφική παράσταση της f να έχει σημείο καμπής.

ii) α) Προφανώς η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{π}{2}\right)$, $\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$, $\left(\frac{π}{2}, +\infty\right)$ διότι οι συναρτήσεις ημx, συνx είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, και οι -2ημx, αημx+β, είναι συνεχείς συναρτήσεις εφ' όσον προκύπτουν από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

β) Θα εξετάσουμε την συνέχεια της f στα σημεία $x_1=-\frac{π}{2}$ και $x_2=\frac{π}{2}$

i) Στο σημείο $x_1=-\frac{π}{2}$ έχουμε:

$$f(x_1)=f\left(-\frac{π}{2}\right)=-2ημ\left(-\frac{π}{2}\right)=-2(-1)=2 \quad (1)$$

Ακόμα: $$\lim_{x\to -\frac{π}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to -\frac{π}{2}^-}(-2ημx)=-2ημ\left(-\frac{π}{2}\right)=2 \quad (2)$$

Τέλος, $\lim_{x\to -\frac{π}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{π}{2}^+}(αημx+β)=α\lim_{x\to -\frac{π}{2}^+}ημx+β=αημ\left(-\frac{π}{2}\right)+β=β-α \quad (3)$.

Για να υπάρχει το όριο της f στο $-\frac{π}{2}$ πρέπει τα πλευρικά της όρια στο $-\frac{π}{2}$ να είναι ίσα, οπότε από τις (2) και (3) είναι $β-α=2$ (4) και τότε $\lim_{x\to -\frac{π}{2}} f(x)=2=f\left(-\frac{π}{2}\right)$.

ii) Στο σημείο $x_2=\frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\alpha\eta\mu x+\beta)=\alpha+\beta \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sigma\upsilon\nu x=0 \qquad (6)$$

Από τις (6), (5) προκύπτει $\alpha+\beta=0$ (7)

Για να είναι η f συνεχής και στο x_1 και στο x_2 (άρα σ'όλο το $\mathbb{R}$) πρέπει να συναληθεύουν οι (4) και (7), οπότε $\alpha=-1$ και $\beta=1$.

28. α) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+\lambda}{x-2} & \alpha\nu \quad x<2\\ \lambda-\kappa & \alpha\nu \quad x=2\\ \dfrac{4x^2+\kappa x-\lambda}{x-2} & \alpha\nu \quad x>2\end{cases}$$

Να προσδιοριστούν οι $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{\alpha x-11}{x+\alpha-12}, \quad x\neq 12-\alpha, \quad \alpha\neq 1$$

Να βρεθούν τα ακρότατά της.

Λύση:

α) Πρέπει να είναι $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)$.

Για να είναι $\lim_{x\to2^-}f(x)$ πραγματικός αριθμός πρέπει για κάθε $x<2$ να είναι $x^2+x+\lambda=(x-2)(x-\alpha)$ (όπου $\alpha\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow x^2+x+\lambda=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}1=-(2+\alpha)\\ \lambda=2\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-3\\ \lambda=-6\end{cases} \qquad (1)$$

Έτσι είναι $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}(x+3)=5$ (2)

Είναι $f(2)=\lambda-\kappa \overset{(1)}{=} -6-\kappa \overset{(2)}{=} 5 \Rightarrow \kappa=-11$.

Για $\lambda=-6$ και $\kappa=-11$ είναι:

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{4x^2-11x+6}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(4x-3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}(4x-3)=5=f(2).$$

β) Είναι $x\neq12-\alpha$ και $x\in[-1,3]$. Άρα $12-\alpha\notin[-1,3]$ δηλαδή $12-\alpha<-1$ ή $12-\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,9)\cup(13,+\infty)$.

Είναι ακόμα $f'(x)=\cdots=\frac{(\alpha-1)(\alpha-11)}{(x+\alpha-12)^2}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\alpha\in(13,+\infty)$ τότε είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$ στο $[-1,3]$.

Άρα $-1\leq x\leq 3 \Rightarrow f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$. Πράγμα που σημαίνει ότι το ελάχιστο είναι το $f(-1)=\frac{-\alpha-11}{-1+\alpha-12}=\frac{\alpha+11}{13-\alpha}$ και το μέγιστο είναι το $f(3)=\frac{3\alpha-11}{\alpha-9}$.

ii) $\alpha\in(-\infty,1)$ τότε $f'(x)>0$ οπότε έχουμε τα ακρότατα της προηγούμενης περίπτωσης.

iii) $\alpha\in(1,9)$ τότε είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow$ στο $[-1,3]$.

Άρα $-1\leq x\leq 3 \Rightarrow f(-1)\geq f(x)\geq f(3)$.

Έτσι μέγιστο είναι το $f(-1)$ και ελάχιστο το $f(3)$.

29. α)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(2x+1)e^{2x+1}-2=0$ (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$ και τέτοιες που $f(x_0)=g(x_0)$ (1) και $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in A$. Να δειχθεί ότι $f'(x_0)=g'(x_0)$.

(**άσκηση** σύνθεσης)

Λύση:

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(2x+1)e^{2x+1}-2$ που είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $(2x+1)e^{2x+1}$, -2 (η $(2x+1)e^{2x+1}$ είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $2x+1$ (πολυωνυμική) και e^{2x+1} (σύνθεση των $2x+1$ και e^x)).

Είναι ακόμα $f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f(0)=-2\cdot(e-2)<0$ (είναι $e>2$). Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)$ (άρα και της $f(x)=0$) στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση h=f-g που είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Είναι: $h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)\overset{(1)}{=}0$ (3) και $h(x)=f(x)-g(x)\overset{(2)}{\le}0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Είναι: $h'_\alpha(x_0)=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{h(x_0+t)-h(x_0)}{t}\overset{(3)}{=}\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{h(x_0+t)}{t}\ge0$ (διότι $h(x)\le0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $t\to0^-$ άρα $t<0$) είναι ακόμα:

$h'_\delta(x_0)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{h(x_0+t)-h(x_0)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{h(x_0+t)}{t}\le0$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι $h'_\alpha(x_0)=h'_\delta(x_0)=h'(x_0)$ (4) και επειδή $h'_\alpha(x_0)\ge0$, $h'_\delta(x_0)\le0$ θα είναι $h'(x_0)=0$.

Είναι όμως $h'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$. Άρα

$$f'(x_0)-g'(x_0)=0\iff f'(x_0)=g'(x_0).$$

***30. i) Να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{\nu+1}<\ln(\nu+1)-\ln(\nu)<\dfrac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες (α_ν), (β_ν) με $\alpha_\nu=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{\nu}$ και $\beta_\nu=\alpha_\nu-\ln\nu$ να δειχθεί ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $+\infty$ ενώ η (β_ν) είναι συγκλίνουσα.

(Σ.Μ.Α.)

Λύση:

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\ln x$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[\nu,\nu+1]$, συνεπώς: $\exists\ \xi\in(\nu,\nu+1)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(\nu+1)-f(\nu)}{(\nu+1)-\nu}\iff\xi\in(\nu,\nu+1)$: $\dfrac{1}{\xi}=$

$=\ln(\nu+1)-\ln\nu.$

επειδή $\nu<\xi<\nu+1\iff\dfrac{1}{\nu+1}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\nu}\Rightarrow\dfrac{1}{\nu+1}<\ln(\nu+1)-\ln\nu<\dfrac{1}{\nu}$

ii) 1) Επειδή $\ln(\nu+1)-\ln\nu<\dfrac{1}{\nu}$, για $\nu=1,2,3,\dots,\nu$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\ln2-\ln1<1\\ \ln3-\ln2<\dfrac{1}{2}\\ \ln4-\ln3<\dfrac{1}{3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \ln(\nu+1)-\ln\nu<\dfrac{1}{\nu}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{προσθ.}}\ln(\nu+1)<\alpha_\nu$$

Επειδή $\lim\ln(\nu+1)=+\infty$ είναι και $\lim\alpha_\nu=+\infty$.

2) Είναι $\beta_\nu=\alpha_\nu-\ln\nu$, $\beta_{\nu+1}=\alpha_{\nu+1}-\ln(\nu+1)$, άρα έχουμε:

$$\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu)-(\ln(\nu+1)-\ln\nu)$$

$$\iff\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=\frac{1}{\nu+1}\ (\ln(\nu+1)-\ln\nu),$$

Είναι όμως $\dfrac{1}{\nu+1}<\ln(\nu+1)-\ln\nu$, άρα $\beta_{\nu+1}-\beta_\nu<0$. Άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

Θα δείξουμε ότι η (β_ν) είναι φραγμένη κάτω. Έχουμε:

$$\ln(\nu+1)<\alpha_\nu,\Rightarrow\ln(\nu+1)-\ln\nu<\alpha_\nu-\ln\nu\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\ln(\nu+1)-\ln\nu<\beta_\nu\\ \text{αλλά}\ \dfrac{1}{\nu+1}<\ln(\nu+1)-\ln\nu\end{array}\right|\Rightarrow\beta_\nu>\frac{1}{\nu+1}>0$$

για κάθε $\nu=1,2,3,\dots$ άρα η (β_ν) είναι φραγμένη κάτω από το 0 και συνεπώς είναι συγκλίνουσα.

**31. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{|x-1|e^{\nu x}+\alpha(x+1)^2e^{-\nu x}}{e^{\nu x}+e^{-\nu x}},\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

i) Να μετασχηματισθεί ο τύπος της f σε πολλαπλό.

ii) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iii) Να εξεταστεί η f ως προς την παραγωγισιμότητα.

iv) Να βρεθεί η συνάρτηση g με $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ όταν $x\ge1$.

(Lycee Lavoisier)

Λύση:

i) α) Έστω x=0 τότε έχουμε $f(x)=\dfrac{1+\alpha}{2}$.

β) Έστω $x<0$ τότε είναι $-x>0$ οπότε $0<e^x<1$.

Άρα $e^{\nu x}=(e^x)^\nu\to0$. Είναι ακόμα $e^{-x}>1$, οπότε $e^{-\nu x}=(e^{-x})^\nu\to+\infty$.

Άρα $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{|x-1|e^{\nu x}+\alpha(x+1)^2e^{-\nu x}}{e^{\nu x}+e^{-\nu x}}=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{|x-1|(e^{\nu x})^2+\alpha(x+1)^2}{(e^{\nu x})^2+1}=$

$=\dfrac{\alpha(x+1)^2}{1}=\alpha(x+1)^2.$

γ) Αν $x>0$ τότε $e^x>1$ και $0<e^{-x}<1$. Άρα $e^{\nu x}\to+\infty$ και $e^{-\nu x}\to0$. Έτσι είναι:

$$f(x)=\lim_{\nu\to+\infty} \frac{|x-1|+\alpha(x+1)^2(e^{-\nu x})^2}{1+(e^{-\nu x})^2} = \frac{|x-1|}{1}\,.$$

Άρα
$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1)^2 & \text{αν } x \in (-\infty,0) \\ \frac{\alpha+1}{2} & \text{αν } x = 0 \\ x-1 & \text{αν } x \in [1,+\infty) \\ -x+1 & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases}$$

ii) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $[1,+\infty)$, $(0,1]$. Για να είναι συνεχής η f στο IR, πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. Άρα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0^-}[\alpha(x+1)]^2=\lim_{x\to 0^+}(-x+1)=1 \quad \text{ή} \quad \alpha=1$$

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$, $(0,1)$. Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της f στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=1$.

Έχουμε: $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+1-1}{x}=-1$ και

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Έχουμε ακόμα

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1 \quad \text{και}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+1}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}1=-1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 1.

iv) Έστω $1\le x$. Έχουμε: $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt+$

$$+\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}\alpha(t+1)^2dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x}(t-1)dt=\alpha\left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{1}+$$

$$+\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{1}^{x}=\ldots$$

32. α) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $|f(x)|\le x^2$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f'(0)=0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} 2\,\frac{e^{x-1}-1}{x-1} & x\in(-\infty,1) \\ 2 & \text{αν } x=1 \\ [2x-1] & \text{αν } x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

(Bacc. Nantes)

Λύση:

i) Η (1) γράφεται $-x^2\le f(x)\le x^2$ (2) $\xrightarrow{x=0}$ $0\le f(0)\le 0$. Άρα $f(0)=0$.

Η (2) γράφεται για $x>0$: $-x\le \frac{f(x)}{x}\le x$ (3).

Η (3) επειδή $\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$ και $\lim_{x\to 0^+}x=0$ δίνει $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$.

Η (2) για $x<0$ δίνει $-x\ge\frac{f(x)}{x}\ge x$ (4).

Η (4) επειδή $\lim_{x\to 0^-}(-x)=\lim_{x\to 0^-}x=0$ δίνει $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0$.

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Έχουμε: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=$
$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

ii) Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

Είναι $\lim_{x\to 1^-}f(x)=2\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=2\lim_{x-1\to 0^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=2$.

Είναι και $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}[2x-1]=[2(1+\varepsilon)-1]=[1+2\varepsilon]=2$ όπου $0\le\varepsilon<1$.

Άρα $\lim_{x\to 1}f(x)=2=f(1)$.

****33. α) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $|f(x)|\leqslant|x^2-3x+2|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.**

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\le f(x)\le x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και να βρεθεί η $f'(x_0)$.

(Ε.Μ.Π)

Λύση:

i) Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$. Έχουμε:

$$|f(x)|\le|x^2-3x+2| \Longleftrightarrow -|x^2-3x+2|\le f(x)\le|x^2-3x+2|.$$

Είναι $\lim_{x\to 2}(-|x^2-3x+2|)=\lim_{x\to 2}|x^2-3x+2|=0$. 'Αρα $\lim_{x\to 2} f(x)=0$ (1).

Είναι ακόμα $|f(x)| \le |x^2-3x+2|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x=2$ επομένως είναι $|f(2)| \le 0 \Rightarrow f(2)=0$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

ii) Η $x \le f(x) \le x+x^2$ (1) για $x=0$ δίνει $0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0)=0$.

'Εστω $x\neq 0$ η (1) γράφεται για $x > 0$ $\quad 1 \le \frac{f(x)}{x} \le x+1$ (2) ή $1 \ge \frac{f(x)}{x} \ge x+1$ (3) για $x < 0$. Επειδή $\lim_{x\to 0} 1=1$, $\lim_{x\to 0}(x+1)=1$, οι (2) και (3) δίνουν $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=1$. 'Εχουμε τώρα

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

**34. α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \max\{\lambda(x-1),\ (\lambda-1)x\}, & \text{αν } x\neq\lambda \\ 0, & \text{αν } x=\lambda \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

β) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με την f' συνεχή στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι, αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(Μαθηματικό Θεσ/νίκης)

Λύση:

α) Θα μετασχηματίσουμε τον τύπο της f σε πολλαπλό:

'Εστω $\lambda(x-1) > (\lambda-1)x$ ή $\lambda x-\lambda > \lambda x-x$ ή $\lambda < x$ τότε είναι:

$$f(x)=\lambda(x-1) \text{ ή } f(x)=\lambda x-\lambda.$$

'Εστω $\lambda(x-1) < (\lambda-1)x$ ή $\lambda x-\lambda < \lambda x-x$ ή $x < \lambda$ τότε είναι:

$$f(x)=(\lambda-1)x \text{ ή } f(x)=\lambda x-x$$

'Ετσι ο τύπος της f γράφεται: $f(x)=\begin{cases} \lambda x-\lambda & \text{αν } x > \lambda \\ 0 & \text{αν } x = \lambda \\ \lambda x-x & \text{αν } x < \lambda \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στην ένωση $(-\infty,\lambda) \cup (\lambda,+\infty)$, ως πολυωνυμική. Θα εξετάσουμε την συνέχεια της f στο σημείο $x=\lambda$. Είναι $f(\lambda)=0$ και $\lim_{x\to\lambda^-} f(x)=\lim_{x\to\lambda}(\lambda x-x)=\lambda^2-\lambda$, $\quad \lim_{x\to\lambda^+} f(x)=\lim_{x\to\lambda}(\lambda x-\lambda)=\lambda^2-\lambda$.

Για να είναι η f συνεχής στο σημείο $x_0=\lambda$ πρέπει να είναι:

$$\lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=1)$$

β) Είναι $x \in (0,+\infty)$. Στο διάστημα $[x, x+1]$ για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής. 'Αρα υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \text{ ή } f'(\xi)=f(x+1)-f(x) \quad (1)$$

Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)=0$. 'Αρα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0 \quad (2)$$

Είναι $\xi \in (x,x+1)$. 'Ετσι όταν $x \to +\infty$ είναι και $\xi \to +\infty$. Η (1) δίνει

$$\lim_{\xi\to+\infty} f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] \xrightarrow{(2)} \lim_{\xi\to+\infty} f'(\xi)=0 \text{ ή } \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

***35. Θεωρούμε την συνάρτηση f η οποία: 'Εχει ν-1 τάξεως παράγωγο συνεχή στο διάστημα $[x_0,x_\nu]$. 'Εχει νιοστής τάξεως παράγωγο στο διάστημα (x_0,x_ν). Ισχύει:**

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\nu \Rightarrow f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_\nu) \quad \text{όπου}$$

$x_1,x_2,\dots,x_{\nu-1} \in (x_0,x_\nu)$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα σημείο ξ του διαστήματος $[x_0,x_\nu]$ τέτοιο ώστε $f^{(\nu)}(\xi)=0$.

(Θέμα διαγωνισμού)

Λύση:

Στα διαστήματα $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]\dots[x_{\nu-1},x_\nu]$ ισχύει για την f το θεώρημα του Rolle. 'Αρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_0,x_1)$, $\xi_2 \in (x_1,x_2),\dots,$ $\xi_\nu \in (x_{\nu-1},x_\nu)$ με $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots < \xi_\nu$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=$ $=\cdots=f'(\xi_\nu)=0$. 'Ετσι η συνάρτηση f' έχει ν ρίζες τουλάχιστον.

Στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$, $[\xi_2,\xi_3],\dots,[\xi_{\nu-1},\xi_\nu]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f'. 'Ετσι υπάρχουν $\rho_2 \in (\xi_1,\xi_2)$, $\rho_3 \in (\xi_2,\xi_3)$ $\dots\rho_\nu \in (\xi_{\nu-1},\xi_\nu)$ με $\rho_2 < \rho_3 < \cdots < \rho_\nu$ τέτοιοι ώστε $f''(\rho_2)=f''(\rho_3)=$ $=\cdots=f''(\rho_\nu)=0$. 'Ετσι η συνάρτηση f'' έχει ν-1 ρίζες τουλάχιστον.

Επαγωγικά εργαζόμενοι καταλήγουμε ότι για τα διαστήματα $[u_{\nu-2},u_{\nu-1}]$ $[u_{\nu-1},u_\nu]$ όπου $u_{\nu-2},u_{\nu-1},u_\nu$ ρίζες της $f^{(\nu-2)}$ ισχύει το θεώρημα του Rolle.

Άρα υπάρχουν $\mu_{\nu-1} \in (u_{\nu-2}, u_{\nu-1})$, $\mu_\nu \in (u_{\nu-1}, u_\nu)$ τέτοιοι ώστε:

$$f^{(\nu-1)}(\mu_{\nu-1})=f^{(\nu-1)}(\mu_\nu)=0$$

Έτσι για το διάστημα $[\mu_{\nu-1},\mu_\nu]$ για την συνάρτηση $f^{(\nu-1)}$ ισχύει το θεώρημα του Rolle. Άρα υπάρχει $\xi \in (\mu_{\nu-1},\mu_\nu)$ τέτοιος ώστε $f^{(\nu)}(\xi)=0$.

*****36. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x)$.**

i) Να δειχθεί ότι είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω)

ii) Να δειχθεί ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ (1).

iii) Να δειχθεί ότι $\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \ge \ln\alpha\cdot\ln\beta$, $(\alpha > 1,\ \beta > 1)$.

β) Να δειχθεί ότι το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=x\eta\mu x$ έχει σημεία καμπής που βρίσκονται στο διάγραμμα της συνάρτησης $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

(Bac. Limoge)

Λύση:

α) i) Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f. Πρέπει να είναι $x > 0, x\neq 1$ και $\ln x > 0$. Άρα πρέπει να είναι $x > 1$. Επομένως είναι $A=(1,+\infty)$.

Έχουμε $f'(x)=[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln x}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln x}$ και

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x\ln x}\right)' = -\frac{(x\ln x)'}{(x\ln x)^2} = -\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}.$$

Είναι όμως $\ln x+1 > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ δηλαδή η f είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

ii) Η απόδειξη έχει δοθεί στην Άσκηση 11 σελίδα 245.

iii) Η (1) γράφεται $2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge \ln(\ln\alpha)+\ln(\ln\beta)$ ή

$$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \ge \ln(\ln\alpha\cdot\ln\beta) \text{ ή } \left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \ge \ln\alpha\cdot\ln\beta.$$

β) Έχουμε $f'(x)=\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=2\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x$.

Η $f''(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0, \pi/2)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει ότι $f''(0)=2 > 0$ και $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2} < 0$. Επομένως:

$f''(0)f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ άρα θα υπάρχει $\xi \in (0, \pi/2)$ τέτοιος ώστε (θεώρημα Bolzano): $f''(\xi)=0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\xi-\xi\cdot\eta\mu\xi=0 \Leftrightarrow \xi=2\sigma\varphi\xi$ (1).

Έχουμε ακόμη $f'''(x)=-3\eta\mu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x$. Εξετάζουμε αν η ρίζα ξ της $f''(x)=0$ μηδενίζει την $f'''(x)$. Έστω ότι $f'''(\xi)=0$ ή

$$-3\eta\mu\xi-\xi\cdot\sigma\upsilon\nu\xi=0 \Rightarrow \xi=-\frac{3}{\sigma\varphi\xi} \quad (2).$$

Τότε από τις (1) και (2) προκύπτει: $2\sigma\varphi\xi=-\frac{3}{\sigma\varphi\xi} \Rightarrow \sigma\varphi^2\xi=-\frac{3}{2}$ άτοπο. Άρα η ρίζα ξ της $f''(x)=0$ δεν είναι και ρίζα της $f'''(x)$. Δηλαδή τελικά $f'''(\xi)\neq 0$. Επομένως το ξ που δίνεται από την σχέση $\xi=2\sigma\varphi\xi$ είναι τετμημένη σημείου καμπής της $f(x)=x\cdot\eta\mu x$. Είναι:

$$\psi=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \psi^2(x^2+4)=4x^2 \quad (3).$$

Για να ανήκει το σημείο καμπής $(\xi, f(\xi))$ στην (3) θα πρέπει να την επαληθεύει. Έχουμε:

$$\xi^2\eta\mu^2\xi(\xi^2+4)=4\xi^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\xi(\xi^2+4)=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\xi(4\sigma\varphi^2\xi+4)=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\xi\left(4\,\frac{\sigma\upsilon\nu^2\xi}{\eta\mu^2\xi}+4\right)=4 \Leftrightarrow \eta\mu^2\xi\left(\frac{4}{\eta\mu^2\xi}\right)=4 \Leftrightarrow 4=4$$

37. α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha\neq 0$. Αν τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα βρίσκονται πάνω σ' ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων τότε είναι $\beta\gamma=9\alpha\delta$.

β) Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε τρία διαφορετικά σημεία, ισχύει $3\beta^2\neq 8\alpha\gamma$

(θέμα εξετάσεων)

Λύση:

α) Έστω τα σημεία $M_1(x_1,f(x_1))$ και $M_2(x_2,f(x_2))$ στα οποία η f έχει ακρότατα. Τα x_1,x_2 είναι ρίζες της πρώτης παραγώγου:

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$x_1+x_2=-\frac{2\beta}{3\alpha} \quad (2) \quad \text{και} \quad x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{3\alpha} \quad (3)$$

Τα σημεία M_1,M_2 ανήκουν σε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι της μορφής $\psi=\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1=\lambda x_1 \Rightarrow f(x_1)=\lambda x_1\\ \psi_2=\lambda x_2 \Rightarrow f(x_2)=\lambda x_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow x_2\cdot f(x_1)=x_1\cdot f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2(\alpha x_1^3+\beta x_1^2+\gamma x_1+\delta)=x_1(\alpha x_2^3+\beta x_2^2+\gamma x_2+\delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)[\alpha(x_1+x_2)x_1x_2+\beta\cdot x_1x_2-\delta]=0 \xrightarrow{x_1\neq x_2} \alpha(x_1+x_2)x_1x_2+\beta\cdot x_1x_2-\delta=0$$

οπότε προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (3) ότι:

$$\alpha\left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right)\frac{\gamma}{3\alpha}+\frac{\beta\gamma}{3\alpha}-\delta=0 \Leftrightarrow -\frac{2\beta\gamma}{9\alpha}+\frac{\beta\gamma}{3\alpha}-\delta=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\beta\gamma+3\beta\gamma-9\alpha\delta=0 \Leftrightarrow \beta\gamma=9\alpha\delta.$$

β) Αφού η f έχει τρία διαφορετικά ακρότατα, η πρώτη παράγωγος

$$f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$$

έχει τρεις διαφορετικές ρίζες. Αφού το πολυώνυμο

$$f'(x)=g(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$$

έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, η $g'(x)=12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$ θα έχει δύο διαφορετικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει, όταν $\Delta\neq 0$:

$$36\beta^2-96\alpha\gamma\neq 0 \Leftrightarrow 3\beta^2\neq 8\alpha\gamma.$$

*****38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ και $g(x)=\alpha x+1$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Να βρεθούν:**

i) Τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων των f και g.

ii) Αν A,B είναι τα κοινά τους σημεία να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε η απόσταση AB να είναι η ελάχιστη δυνατή, η οποία και να υπολογιστεί.

(U. of L.)

Λύση:

i) Για τα κοινά τους σημεία πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \psi=\frac{2x-1}{x-1} \\ \psi=\alpha x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=0, \quad \psi=1) \\ \left(x=\frac{\alpha+1}{\alpha}, \ \psi=\alpha+2\right) \end{cases}$$

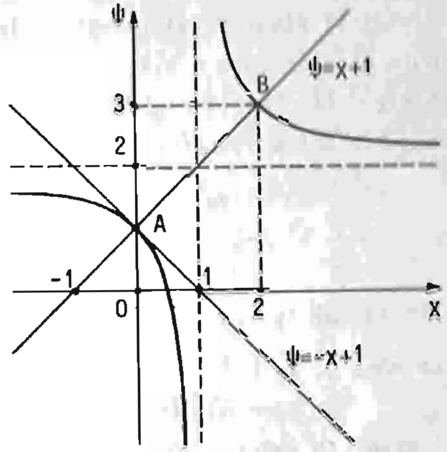
Δηλαδή κοινά σημεία είναι $A(0,\ 1)$ και $B\left(\frac{\alpha+1}{\alpha},\ \alpha+2\right)$.

ii) Είναι $d(A,B)=\sqrt{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}-0\right)^2+(\alpha+2-1)^2} \Leftrightarrow d^2=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2+(\alpha+1)^2.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2+(\alpha+1)^2$. Είναι:

$$f'(\alpha)=2(\alpha+1)(\alpha^3-1) \text{ με ρίζες } (\alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1)$$

Εξάλλου έχουμε $f''(\alpha)=2\left(1+\frac{2\alpha+3}{\alpha^4}\right)$. Είναι $f''(-1)=2\left(1+\frac{1}{(-1)^4}\right)>0$ άρα η f παρουσιάζει για $x=-1$ ελάχιστο.



Είναι και $f''(1)=2\left(1+\frac{5}{1}\right)>0$ άρα η f παρουσιάζει για $x=1$ ελάχιστο.

Παρατηρούμε ότι: Αν $\alpha=-1$ τότε $d(A,B)=0$, πράγμα που σημαίνει ότι ευθεία $\psi=-x+1$ εφάπτεται της $\psi=\frac{2x-1}{x-1}$.

Αν $\alpha=1$ τότε $d(A,B)=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε την ευθεία $\psi=x+1$ και τα σημεία τομής της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $A(0,1)$ και $B(2,3)$.

*****39. α) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$.**

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$ $(x\in\Delta)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση: $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$ για κάθε $x\in\Delta$.

ii) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x$, $0<\alpha<1$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

ii) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2) \quad (1) \quad \text{όπου } 0<\alpha<1$$

(Θέμα Γενικών εξετάσεων)

Λύση:

α) i) Η g στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ αν και μόνο αν $g''(x)\geq 0$.

Είναι $g'(x)=\frac{1}{f(x)}f'(x) \Rightarrow g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

Είναι $g''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\geq 0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-[f'(x)]^2\geq 0$

$\Leftrightarrow f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$.

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η g στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2 \xLeftrightarrow{f(x)=x^2+2} (x^2+2)2\geq(2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2+4\geq 4x^2$ $\Leftrightarrow 2x^2-4\leq 0 \Leftrightarrow x^2-2\leq 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

β) i) Είναι $f'(x)=(\alpha^x-x)'=\alpha^x\ln\alpha-1$. Ισχύει ότι $\alpha^x > 0$ για κάθε $x\in IR$ $\ln\alpha < 0$ (διότι $0 < \alpha < 1$). Άρα $\alpha^x\ln\alpha < 0$. Έτσι είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in IR$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Η f ως γνησίως φθίνουσα είναι "1-1". Η (1) γράφεται:

$$\alpha^{\lambda^2-4}-(\lambda^2-4)=\alpha^{\lambda-2}-(\lambda-2) \Leftrightarrow f(\lambda^2-4)=f(\lambda-2) \overset{"1-1"}{\Longleftrightarrow} \lambda^2-4=\lambda-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda_1=2 \text{ ή } \lambda_2=-1).$$

*****40. α)** Αν για τη συνάρτηση $f:IR \longrightarrow IR$ ισχύει $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leq 1$ (1) για κάθε $x, x_0 \in IR$ με $x\neq x_0$, να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

β) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ συνάρτηση f με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση (c) της συνάρτησης g με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.

(Bac. E, Maroc)

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x \in IR$, διότι τότε η f θα είναι σταθερή. Η σχέση (1) γράφεται $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq (x-x_0)^2$ (2) για κάθε $x, x_0 \in IR$ με $x\neq x_0$ (είναι $(x-x_0)^2 > 0$). Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2=(x_0-x_0)^2=0 \quad (3)$$

Από (2) και (3) προκύπτει $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ για κάθε $x_0 \in IR$ δηλαδή $f'(x_0)=0$ για κάθε $x_0 \in IR$. Επομένως είναι $f'(x)=0$ για κάθε $x \in IR$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η εφαπτομένη (ε) της (c) (στο σημείο $M(x_0,0)$ στο οποίο η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x'x) σχηματίζει με τον x'x γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.

Έχουμε: $g'(x)=\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'=\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

Άρα $g'(x_0)=1-\frac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$ (1) όπου $x_0 \in \Delta$.

Επειδή $M \in (c)$, οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση:

$$\psi=g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Άρα ισχύει $0=g(x_0)=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow f(x_0)=0$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει $g'(x_0)=1$ (3). Ο παράγωγος αριθμός της g στο x_0 είναι ίσος με το

συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης (ε) της (c) στο σημείο $M(x_0,0)$, δηλαδή είναι ίσος με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x'x, οπότε έχουμε $g'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$ (4). Από (3) και (4) προκύπτει $\varepsilon\varphi\omega=1$. Επειδή $0 \leq \omega < \pi$ είναι $\omega=\frac{\pi}{4}$.

*****41.** Θεωρούμε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=(2x-1)f(x)$ (1) για κάθε $x \in IR$ $f(0)=1$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in IR$.

i) Να δειχθεί ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=1$.

ii) Να δειχθεί ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in IR$.

iii) Να δειχθεί ότι $f''(x)=2e^{x^2-x}+(2x-1)^2e^{x^2-x}$

Λύση:

Θα βρούμε τον τύπο της f από την (1).

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $\frac{f'(x)}{f(x)}=2x-1$ ή $(\ln|f(x)|)'=(x^2-x)'$ ή $\ln|f(x)|=x^2-x+c$ ή $|f(x)|=e^{x^2-x+c}$ ή $|f(x)|=e^ce^{x^2-x}$ ή $f(x)=\pm e^ce^{x^2-x}$ ή $f(x)=c_1e^{x^2-x}$ (2). Η (2) για $x=0$ δίνει $f(0)=c_1$ ή $1=c_1$. Άρα είναι $f(x)=e^{x^2}-x$.

i) Είναι $\lim_{x\to 0}e^{x^2-x}=e^{\lim_{x\to 0}(x^2-x)}=e^0=1$.

ii) Προφανώς είναι $f(x)=e^{x^2-x} > 0$ για κάθε $x \in IR$.

iii) Είναι $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x} \Rightarrow f''(x)=2e^{x^2-x}+(2x-1)^2e^{x^2-x}$.

****42. α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:IR \longrightarrow IR$ με $f(x)=x+T$ ($T\in IR^*$) και $g:IR \longrightarrow IR$ τέτοιες ώστε $f\circ g=g\circ f$. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR, να δειχθεί ότι η παράγωγός της g' είναι περιοδική.**

β) Αν για τη συνάρτηση $f:IR \longrightarrow IR^*_+$ ισχύουν οι σχέσεις $f'=2f$ και $f(0)=1$, να βρεθεί τύπος της f και να λυθεί η εξίσωση $f^2(x)+4f(x)=5$.

(Bac. Rouen)

Λύση:

α) Οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ έχουν πεδίο ορισμού το IR και επειδή $f\circ g=g\circ f$ είναι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$, (για κάθε $x \in IR$) ή $f(g(x))=g(f(x))$, $g(x)+T=g(x+T)$ (1). Επειδή οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο IR, από τη σχέση (1) έχουμε $[g(x)+T]'=[g(x+T)]'$ ή $g'(x)+T'=g'(x+T)(x+T)'$ ή $g'(x)+0=g'(x+T)1$ ή $g'(x+T)=g'(x)$, (για κάθε $x \in IR$).

Άρα η συνάρτηση g' είναι περιοδική με περίοδο $T \in IR^*$.

β) Η σχέση $f'=2f$ γράφεται $f'(x)=2f(x)$ (για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} f'(x)=2 \Leftrightarrow [\ln f(x)]'=(2x)' \quad (f(x)>0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)=2x+c, \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f(x)=e^{2x+c} \quad (1) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(0)=e^c$ (2). Είναι $f(0)=1$ (3).
Από (2), (3) έχουμε $e^c=1 \Leftrightarrow c=0$ και η (1) δίνει $f(x)=e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Η εξίσωση $f^2(x)+4f(x)=5$ γράφεται ισοδύναμα $f^2(x)+4f(x)-5=0$ και έχει ρίζες τις: $f(x)=1$ και $f(x)=-5$ (απορρίπτεται).
Άρα $f(x)=1 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow e^{2x}=e^0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

*****43. α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο**

$$f(x)=\max\{\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x\}$$

i) Να βρεθεί η παράγωγός της στο $\frac{\pi}{4}$.

ii) Να βρεθούν τα ακρότατά της.

iii) Να εξεταστεί αν για την f ισχύει το θ. του Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

β) Να δειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu]{\ln\nu}=1$

(Bac. Limoge)

Λύση:

α) Είναι γνωστό ότι $\eta\mu x>0$, $\sigma\upsilon\nu x>0$, $\varepsilon\varphi x>0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $\varepsilon\varphi x<1 \Leftrightarrow \eta\mu x<\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varepsilon\varphi x>1 \Leftrightarrow \eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x$.

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$. Έτσι ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x & \text{αν } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \eta\mu x & \text{αν } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

i) Εξετάζουμε αν υπάρχει η $f'(x)$ στο $x_0=\frac{\pi}{4}$. Είναι:

$$f'_\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\pi/4^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\pi/4^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/4^-}\frac{-\eta\mu x}{1}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $f'_\delta\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα δεν υπάρχει η $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

ii) Εφόσον $f'(x)<0$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και $f'(x)>0$ $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η f↓ στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και f↑ στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ δηλ. έχει στα σημεία 0 και $\frac{\pi}{2}$ μέγιστο το 1, ενώ στο $\frac{\pi}{4}$ έχει ελάχιστο το $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) Είναι προφανές ότι δεν ισχύει το θεώρημα του Rolle στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αφού στο $\frac{\pi}{4}$ δεν παραγωγίζεται η f.

β) Είναι $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\ln\nu}=(\ln\nu)^{1/\nu}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=(\ln x)^{1/x}$ $(x>1)$ ή $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}$

Θα βρούμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}$.

Θα βρούμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}$ που είναι τής μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(\ln x))'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}=0$$

(αφού $\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$) άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1$. Άρα και $\lim \alpha_\nu=\lim\sqrt[\nu]{\ln\nu}=1$.

****44. α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x}}$, να μελετηθεί ως προς την συνέχεια στο $(-1,+\infty)$.**

Αν η f δεν είναι συνεχής να ορισθεί κατάλληλα η f ώστε να είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}-2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$$

Να δειχθεί ότι στο σημείο $x_0=-1$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μικρότερη του $\frac{\pi}{4}$.

Λύση:

α) Είναι $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$

Η f είναι συνεχής στο $A\setminus\{0\}$, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\frac{\ln(x+1)}{x}$ (πηλίκο συνεχών) και e^x. (Η συνάρτηση $\ln(x+1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και $\ln x$). Για να γίνει συνεχής στο σημείο $x_0=0$, αρκεί το όριο $\lim_{x\to0} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

Είναι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}}$. Οι συναρτήσεις g,h με $g(x)=\ln(x+1)$ και $h(x)=x$ είναι παραγωγίσιμες στο $(-1,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}(x+1)'=\frac{1}{x+1},\quad h'(x)=1 \text{ και } h'(0)=1\neq0. \text{ Είναι ακόμα } g(0)=0=h(0).$$

Άρα, σύμφωνα με τον κανόνα του L'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\frac{g'(0)}{h'(0)}=\frac{\frac{1}{0+1}}{1}=1,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x)=e^1=e$.

Αν επομένως θεωρήσουμε την f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^{1/x}, & \text{αν } x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ e, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

τότε είναι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=e=f(0)$ και η f γίνεται συνεχής και στο σημείο $x_0=0$, οπότε και σ'ολόκληρο το $(-1,+\infty)$.

β) Έστω $g(x)=2^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot2^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln2$.

Έστω ακόμα $h(x)=2^{\frac{1}{x^2(x-1)}} \Rightarrow h'(x)=-\frac{3x-2}{x_1^3(x-1)^2}\cdot2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}\cdot\ln2$

Άρα: $f'(x)=\frac{\ln2}{(x-1)^2}\left[-2^{\frac{1}{x-1}}+\frac{3x-2}{x^3}\,2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}\right]$ άρα $f'(-1)=\dots=\frac{\ln2}{\sqrt2}$

Είναι $2<e$ και $\sqrt2<2$ άρα $2^{\sqrt2}<e^2$ όποτε $\ln2^{\sqrt2}<\ln e^2 \Leftrightarrow \sqrt2\,\ln2<2$ $\Leftrightarrow \ln2<\sqrt2 \Leftrightarrow \frac{\ln2}{\sqrt2}<1 \Leftrightarrow f'(-1)<1 \Leftrightarrow f'(-1)<εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow εφω<εφ\frac{π}{4}$ $\Leftrightarrow ω<\frac{π}{4}$.

***45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{1-x}$ $(x\neq1)$.

i) Να δειχθεί ότι η νιοστή παράγωγος της f έχει τύπο:

$$f^{(ν)}(x)=ν!(1-x)^{-ν-1}\quad(1),\quad ν=3,4,5,\dots$$

ii) Θεωρούμε την ακολουθία $(α_ν)$ με $α_ν:\begin{cases}α_1=α\\ α_2=β\\ α_ν=1/f^{(ν)}(x).\end{cases}$

Να βρεθεί το $\lim α_ν$.

(Θέμα Ε.Μ.Π)

Λύση:

i) Η διαίρεση του x^3 με το $1-x$ δίνει πηλίκο $-x^2-x-1$ και υπόλοιπο 1. Άρα:

$$x^3=(1-x)(-x^2-x-1)+1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{1-x}=-x^2-x-1+\frac{1}{1-x} \Leftrightarrow f(x)=-x^2-x-1+(1-x)^{-1}.$$

Έχουμε λοιπόν $f'(x)=-2x-1+(-1)(1-x)'(1-x)^{-1-1}=-2x-1+(1-x)^{-2}$

$$f''(x)=-2+(-2)(1-x)'\cdot(1-x)^{-2-1}=-2+2(1-x)^{-3}.$$

$$f'''(x)=2(-3)(1-x)'(1-x)^{-3-1}=6(1-x)^{-3-1}=3!(1-x)^{-3-1}$$

δηλ. η σχέση (1) αληθεύει για ν=3. Έστω ότι η (1) αληθεύει για ν=κ οπότε $f^{(κ)}(x)=κ!(1-x)^{-κ-1}$, παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f^{(κ+1)}(x)=κ!(-κ-1)(1-x)'\cdot(1-x)^{-κ-1-1}=κ!(-κ-1)(-1)(1-x)^{-(κ+1)-1}$$
$$=κ!(κ+1)(1-x)^{-(κ+1)-1}=(κ+1)!(1-x)^{-(κ+1)-1}$$

Επομένως η σχέση (1) ισχύει και για ν=κ+1.

ii) Είναι $α_ν=\frac{1}{ν!(1-x)^{-(ν+1)}}=\frac{(1-x)^{ν+1}}{ν!}\neq0,\quad ν=3,4\dots$

Άρα $\left|\frac{α_{ν+1}}{α_ν}\right|=\left|\frac{(1-x)^{ν+2}/(ν+1)!}{(1-x)^{ν+1}/ν!}\right|=\left|\frac{(1-x)^{ν+2}\cdot ν!}{(ν+1)!(1-x)^{ν+1}}\right|=$

$$=\left|\frac{(1-x)ν!}{ν!\,(ν+1)}\right|=\left|\frac{1-x}{ν+1}\right|=|1-x|\cdot\frac{1}{ν+1}\to0<1$$

άρα $\lim α_ν=0$.

***46. α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{2e}x^2$ και $g(x)=\ln x$.

i) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις (c_1), (c_2) των f,g εφάπτονται.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.

β) Να δειχθεί ότι στην υπερβολή $2xψ=α^2$ το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από μια εφαπτομένη της και τους άξονες είναι σταθερό.

(Ε.Μ.Π.)

Λύση:

α) i) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{x}{e}$, ενώ η g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Αν $M(x_0,\psi_0)$ είναι το σημείο επαφής των (c_1), (c_2), τότε οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν τις εξισώσεις $\psi=f(x)$ και $\psi=g(x)$ οπότε:

$$\left.\begin{matrix}\psi_0=f(x_0)\\ \psi_0=g(x_0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \psi_0=f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow \psi_0=\frac{x_0^2}{2e}=\ln x_0 \qquad (1)$$

Οι γραφικές παραστάσεις (c_1), (c_2) θα έχουν στο κοινό σημείο επαφής την ίδια εφαπτομένη (ε), οπότε θα είναι: $\lambda_{(\varepsilon)}=f'(x_0)=g'(x_0)$, δηλαδή

$$\frac{x_0}{e}=\frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0^2=e \Leftrightarrow x_0=\sqrt{e} \quad (2), \ (\text{αφού } x_0 \in B)$$

Από (1), (2) προκύπτει $\psi_0=\dfrac{e}{2e}=\dfrac{1}{2}$, οπότε τα διαγράμματα (c_1),(c_2) των f,g εφάπτονται στο σημείο $M(x_0,\psi_0)=\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2}\right)$.

ii) Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) στο σημείο

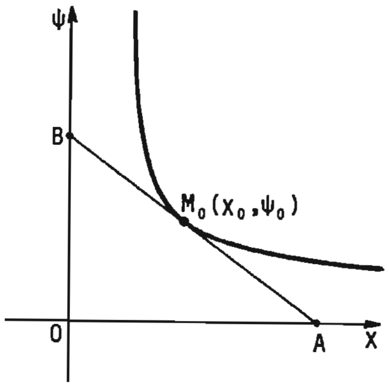
$$M(x_0,f(x_0))=(x_0,g(x_0)) \text{ είναι: } \psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (3)$$

όπου $x_0=\sqrt{e}$, $f(x_0)=\psi_0=\dfrac{1}{2}$ και $f'(x_0)=f'(\sqrt{e})=\dfrac{\sqrt{e}}{e}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Άρα η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\psi-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e}) \Leftrightarrow \psi=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}.$$

β) Έχουμε $\psi=\dfrac{\alpha^2}{2x} \Rightarrow \psi'=\dfrac{-\alpha^2}{2x^2}=f'(x)$.



Αν λοιπόν $M_0(x_0,\psi_0)$ είναι το σημείο επαφής θα έχουμε:

$$\lambda=f'(x_0)=-\frac{\alpha^2}{2x_0^2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\psi-\frac{\alpha^2}{2x_0}=\frac{-\alpha^2}{2x_0^2}(x-x_0) \Leftrightarrow \psi=\frac{\alpha^2}{2x_0}-\frac{\alpha^2 x}{2x_0^2}+\frac{\alpha^2}{2x_0} \Leftrightarrow \psi=\frac{\alpha^2}{x_0}-\frac{\alpha^2 x}{2x_0^2}.$$

Θα βρούμε τα σημεία που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες. Αν $x=0 \Rightarrow \psi=\dfrac{\alpha^2}{x_0}$ και αν $\psi=0 \Rightarrow x=2x_0$. Άρα

$$(OAB)=\frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OB}|=\left|\frac{1}{2}\right|2x_0\frac{\alpha^2}{x_0}\left|=\alpha^2.\right.$$

**47. α) Η εφαπτομένη στο σημείο $x=\alpha$ ($\alpha \geq 0$) της παραβολής $\psi=x^2-3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B.

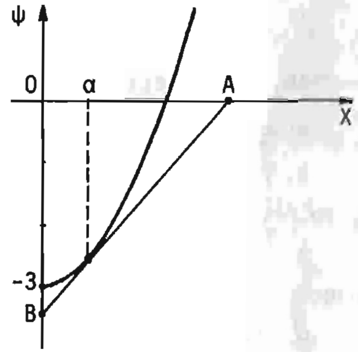
i) Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\dfrac{1}{4\alpha}(3+\alpha^2)^2$.

ii) Να δειχθεί ότι για $\alpha=1$ το εμβαδόν του τριγώνου είναι ελάχιστο.

β) Θεωρούμε την παραβολή (c): με εξίσωση $\psi^2=4x$. Έστω A, A΄ δυο σημεία της (c) με τετμημένη 1. Να εγγραφεί στο τόξο AOA΄ της παραβολής ορθογώνιο, με μια πλευρά πάνω στην AA΄ που να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.

(U. of. L.)

Λύση:



α) Είναι $f'(x)=2x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(\alpha, \alpha^2-3)$ είναι:

$$f(x)-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

ή $\quad \psi-(\alpha^2-3)=2\alpha(x-\alpha)$ ή $\psi-2\alpha x=-\alpha^2-3$.

Τα σημεία A και B είναι τα $A\left(\dfrac{3+\alpha^2}{2\alpha}, 0\right)$ και $B(0,-(\alpha^2+3))$. Είναι λοιπόν:

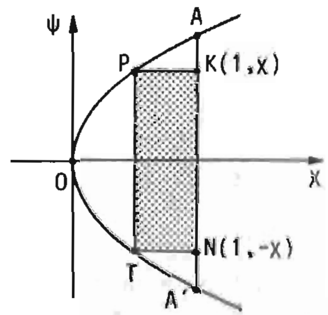
$$(OAB)=\frac{1}{2}|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|=\frac{(3+\alpha^2)^2}{4\alpha}$$

Έστω $E(\alpha)=\dfrac{(3+\alpha^2)^2}{4\alpha}$. Είναι: $\Delta(E)=(0,+\infty)$ και $E'(\alpha)=\dfrac{3}{4\alpha^2}(\alpha^2-1)(\alpha^2+3)$.

με $E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm 1$. Το πρόσημο της $E'(\alpha)$ είναι:

α	0		1		$+\infty$
$E'(\alpha)$		−		+	
$E(\alpha)$		↘	Τ.Ε.	↗	

Έτσι λοιπόν στο σημείο $\alpha=1$ έχουμε τοπικό ελάχιστο το $E(1)=4$.



β) Τα σημεία A, A΄ έχουν τεταγμένες αντίστοιχα 2 και -2 (είναι $\psi^2=4\cdot 1 \Leftrightarrow \psi=\pm 2$).

Υποθέτουμε ότι PTMN είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο στο τόξο AOA΄. Υποθέτουμε ακόμα ότι το σημείο K έχει συντεταγμένες $(1,x)$ με $0 < x < 2$.

Οι συντεταγμένες των P,T,N είναι αντίστοιχα $\left(\dfrac{x^2}{4},x\right)$, $\left(\dfrac{x^2}{4},-x\right)$ και $(1,-x)$ διότι ο άξονας Ox είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής (c). Είναι όμως

$$(PTMN)=|\vec{KN}||\vec{K\Lambda}|=2x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $E(x)=2x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$, $x \in (0,2)$. Θα βρούμε για ποια τιμή του $x \in (0,2)$ η συνάρτηση $E(x)$ παίρνει μέγιστη τιμή. Είναι: $E'(x)=2-\frac{3x^2}{2}$. $E''(x)=-3x$ αλλά:

$$E'(x)=0=2-\frac{3x^2}{2}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}=x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Για $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ είναι $E''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$. Άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Έτσι το ζητούμενο ορθογώνιο ορίζεται από τα σημεία:

$$K\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\ \Lambda\left(\frac{1}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\ M\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\ N\left(1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

**48. α) Να δειχθεί ότι $\frac{συνx}{συνα} > \frac{εφx}{εφα}$ με την προϋπόθεση ότι $0<x<α<\frac{π}{2}$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=αx^4+βx^3+γx^2+x-2$ με $αβ\neq 0$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για τρεις διαφορετικές τιμές του x, να δειχθεί ότι $3β^2-8αγ>0$.

(Bac. Dijon)

Λύση:

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\left(0,\frac{π}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{συνx}{συνα}-\frac{εφx}{εφα}$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{π}{2}\right)$ άρα και στο $(x,α)$ που είναι υποσύνολο του $\left(0,\frac{π}{2}\right)$.

Εφαρμόζουμε στο διάστημα $(x,α)$ το θεώρημα της Μέσης τιμής. Άρα υπάρχει $ξ \in (x,α)$ τέτοιο που:

$$f(α)-f(x)=(α-x)\cdot f'(ξ) \Leftrightarrow -f(x)=(α-x)\cdot\left(-\frac{ημξ}{συνα}-\frac{1}{συν^2ξ\cdot εφα}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-(x-α)\cdot\left(\frac{ημξ}{συνα}+\frac{1}{συν^2ξ\cdot εφα}\right)>0.$$

(διότι: $x<α \Leftrightarrow x-α<0 \Leftrightarrow -(x-α)>0$ και $ημξ>0$, $συνα>0$, $εφα>0$, αφού $α\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$).

Άρα: $\frac{συνx}{συνα}-\frac{εφx}{εφα}>0 \Leftrightarrow \frac{συνx}{συνα}>\frac{εφx}{εφα}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατα για τρεις διαφορετικές τιμές του x.

Άρα η $f'(x)=4αx^3+3βx^2+2γx+1$, έχει 3 διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$, έστω τις $ρ_1,ρ_2,ρ_3$ με $ρ_1<ρ_2<ρ_3$. Τότε όμως για τη συνάρτηση f' ισχύουν:

f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$f'(ρ_1)=f'(ρ_2)=f'(ρ_3)=0$.

Άρα η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[ρ_1,ρ_2]$ και $[ρ_2,ρ_3]$ άρα υπάρχουν $x_1\in(ρ_1,ρ_2)$ και $x_2\in(ρ_2,ρ_3)$ τέτοια ώστε να είναι $f''(x_1)=f''(x_2)=0$ και επειδή η f'' είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού $f''(x)=12αx^2+6βx+2γ$ θα ισχύει ότι:

$$Δ>0 \Leftrightarrow 36β^2-96αγ>0 \Leftrightarrow 36β^2>96αγ \Leftrightarrow 3β^2>8αγ \Leftrightarrow 3β^2-8αγ>0$$

***49. α) i) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα f'=f αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$ (c σταθερά).

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $g'(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx$ (1) και $g(0)=1992$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g ορισμένης στο $\mathbb{R}$ αν

$$g(x)=e^{-x}f(x) \quad \text{και} \quad g(0)=1$$

γ) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $(x,ψ)$ με $-1\le x\le 1$, $0\le ψ\le f(x)$.

(Θέμα Γενικών εξετάσεων)

Λύση:

α) i) Είναι φανερό ότι $(ce^x)'=ce^x$. Αντιστρόφως, έστω μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f'=f. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

είναι σταθερή.

Η F είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=0.\text{ Άρα } F'(x)=0$$

Συνεπώς η F είναι μια σταθερή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση. Αν c η τιμή της, θα έχουμε: $\frac{f(x)}{e^x}=c$ ή $f(x)=ce^x$.

ii) Η (1) γράφεται: $\frac{g'(x)συνx+g(x)ημx}{συν^2x}=\frac{g(x)}{συνx}$ ή

$\frac{g'(x)συνx-g(x)(συνx)'}{συν^2x}=\frac{g(x)}{συνx}$ ή $\left(\frac{g(x)}{συνx}\right)'=\frac{g(x)}{συνx}$. Σύμφωνα με το (i) ερώτημα θα είναι $\frac{g(x)}{συνx}=ce^x$ ή $g(x)=c(συνx)e^x$ (2).

Η (2) για x=0 δίνει $g(0)=c(συν0)e^0$ ή 1992=c. Η (2) γράφεται:

$g(x)=1992(\sigma\upsilon\nu x)e^{x}$.

β) Έχουμε: $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)] \overset{(i)}{=} e^{-x}\cdot 0$.

Άρα $g'(x)=0 \Rightarrow g(x)=c$ (3). Η (3) για $x=0$ δίνει $g(0)=c$ ή $1=c$. Άρα $g(x)=1$.

γ) Είναι $f(x)=(x+4)e^{-x} \geq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=-\int_{-1}^{1}(x+4)(e^{-x})'dx=[-(x+4)e^{-x}]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(x+4)'e^{-x}dx=$$

$$=[-(x+4)e^{-x}]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}e^{-x}dx=[-(x+4)e^{-x}]_{-1}^{1}+[-e^{-x}]_{-1}^{1}=4e-\frac{6}{e} \text{ τ.μ.}$$

*****50.** **α) Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR για την οποία ισχύει $f'(x)=-f(x)$ για κάθε $x \in$ IR.**

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=2e^{x}f(x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της αν είναι $g(0)=1993$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=3e^{-x}h(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Αν ισχύει $h'(x) > h(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και $h(0) \geq 0$ τότε:

i) Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) i) Έχουμε $g'(x)=2e^{x}f(x)+2e^{x}f'(x)=2e^{x}f(x)-2e^{x}f(x)=0$.

Άρα $g'(x)=0 \Rightarrow g(x)=c$ (1). Η (1) για $x=0$ δίνει $g(0)=c$ ή $1993=c$. Άρα είναι $g(x)=1993$.

ii) Είναι $g(x)=2e^{x}f(x) \overset{(i)}{\Longleftrightarrow} 1993=2e^{x}f(x)$ ή $f(x)=\frac{1993}{2}e^{-x}$

β) i) Είναι $g'(x)=3e^{-x}h'(x)-3e^{-x}h(x)$ ή $g'(x)=3e^{-x}(h'(x)-h(x))$.

Είναι $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in$ IR και $h'(x) > h(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Έτσι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Είναι $g(0)=3e^{0}h(0)$ ή $g(0)=3h(0) \geq 0$. Άρα

$$0 \leq x \overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} g(0) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq g(x)$$

Άρα $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Έτσι είναι $g(x)=3e^{-x}h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

*****51.** **α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $\alpha,\beta,\gamma \in$ IR ώστε το διάγραμμά της να παρουσιάζει σημεία καμπής.**

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+\alpha$, αν x_1,x_2,x_3 θέσεις τοπικών ακρότατων της f, να δειχθεί ότι:

i) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό (όπου $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $O(x_3,f(x_3))$).

Λύση:

α) Είναι $f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$ και $f''(x)=12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$.

Για να έχει η f σημεία καμπής, πρέπει η $12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma=0$ να έχει ρίζες πραγματικές διάφορες μεταξύ τους, γιατί τότε η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών. Δηλαδή πρέπει να είναι: $\Delta > 0 \Longleftrightarrow 36\beta^2-8\cdot 12\alpha\gamma > 0$

β) i) Η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο IR με παραγώγους: $f'(x)=4x^3-4x$, $f''(x)=12x^2-4$. Άρα τα τοπικά της ακρότατα εμφανίζονται στις ρίζες της πρώτης παραγώγου. Είναι:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 4x^3-4x=0 \Longleftrightarrow x(x^2-1)=0 \Longleftrightarrow x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=0$$

Είναι ακόμα: $f''(1)=12-4=8 > 0$. Άρα το $f(1)=1-2+\alpha=\alpha-1$ είναι τοπικό ελάχιστο. $f''(-1)=12-4=8 > 0$. Άρα το $f(-1)=\alpha-1$ είναι τοπικό ελάχιστο

$f''(0)=-4 < 0$. Άρα το $f(0)=\alpha$ είναι τοπικό μέγιστο.

Έχουμε: $A(1,\alpha-1)$, $B(-1,\alpha-1)$, $O(0,\alpha)$.

i) $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{OB}=(-1)\cdot(1)=-1 \Rightarrow |\vec{OA}| \perp |\vec{OB}|$.

$|\vec{OA}|=\sqrt{(\alpha-\alpha+1)^2+1}=\sqrt{2}=|\vec{OB}|$ άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

ii) Είναι $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot|\vec{OA}||\vec{OB}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$=σταθερό.

*****52.** **α) Να δειχθεί ότι $\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\beta+1} \geq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.**

β) Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο IR με

$$f'(x)=\frac{2f^2(x)+x}{3f^2(x)+5},\ f(0)=0.$$ **Να δειχθεί ότι:**

i) $f'(0)=0$,

ii) Η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$.

(Θέμα Ε.Μ.Ε)

Λύση:

α) Αρκεί να δειχθεί ότι:

$$(\beta+1)[\ln(\alpha+1)-\ln(\beta+1)]-\beta[\ln\alpha-\ln\beta] \geq 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\alpha)=(\beta+1)[\ln(\alpha+1)-\ln(\beta+1)]-\beta[\ln\alpha-\ln\beta]$, οπότε είναι $f'(\alpha)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha(\alpha+1)}$. Παρατηρούμε ότι $f'(\alpha) > 0$ για $\alpha > \beta$ και $f'(\alpha) < 0$ για $\alpha < \beta$, δηλαδή: $0 \;\; - \;\; \beta \;\; + \;\; +\infty$ (↘ ↗) Άρα στο β η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε $f(\alpha) \geq f(\beta)$ και επειδή $f(\beta)=0 \Rightarrow f(\alpha) \geq 0$.
Άρα η (1) ισχύει.

β) i) Επειδή $f'(x)=\frac{2f^2(x)+x}{3f^2(x)+5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=0$ για $x=0$ είναι: $f'(0)=\frac{2f^2(0)}{3f^2(0)+5}=\frac{0}{0+5}=0.$

ii) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, τα τοπικά της ακρότατα εμφανίζονται στις ρίζες της $f'(x)$ και επειδή $f'(0)=0$, το σημείο $x=0$ είναι πιθανό σημείο τοπικού ακρότατου. Είναι $f''(x)=\left(\frac{2f^2(x)+x}{3f^2(x)+5}\right)'$ ή

$$f''(x)=\frac{[4f(x)f'(x)+1][3f^2(x)+5]-[6f(x)f'(x)][2f^2(x)+x]}{(3f^2(x)+5)^2}$$

Για $x=0$ είναι $f''(0)=\frac{[4f(0)f'(0)+1][3f^2(0)+5]}{[3f^2(0)+5]^2}=\frac{5}{25} > 0$ άρα η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x=0$ που είναι ελάχιστο.

*****53.** α) Δίνεται η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ που είναι δυό φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει $f^2(x)=2x^2-4x$ (1) για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ((α,β) είναι κατάλληλο διάστημα). Να δειχθεί ότι:

i) $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=2.$

ii) Να δειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή σε σημείο του (α,β).

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει η $f'''(x)$ στο IR και για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty$ και ακόμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'''(x)}{f''(x)}=0$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=2$.

(Διαγωνισμός Πάτναμ)

Λύση:

α) i) Η (1) με παραγώγιση δίνει $2f(x)f'(x)=4x-4$ (2). Η (2) με παραγώγιση δίνει $2[f'(x)]^2+2f(x)f''(x)\;4$ ή $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=2$ (3).

ii) Έστω ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τότε θα είναι $f''(x_0)=0$. Η (3) για $x=x_0$ δίνει $[f'(x_0)]^2+f(x_0)f''(x_0)=2$ ή

$[f'(x_0)]^2=2$. (4). Η (2) για $x=x_0$ δίνει, $2f(x_0)f'(x_0)=4x_0-4$ ή $f(x_0)f'(x_0)=2(x_0-1)$ (5). Η (5) με ύψωση στο τετράγωνο δίνει:

$$[f(x_0)]^2[f'(x_0)]^2=4(x_0^2-2x_0+1) \overset{(4)}{=} f^2(x_0)=2(x_0^2-2x_0+1) \quad (6).$$

Η (1) για $x=x_0$ δίνει: $f^2(x_0)=2(x_0^2-2x_0)$ (7). Οι (6) και (7) δίνουν:

$$2(x_0^2-2x_0+1)=2(x_0^2-2x_0) \Leftrightarrow 2=0$$

που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν παρουσιάζει καμπή.

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[xf'(x)]'}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}$

$=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[f'(x)+xf''(x)]'}{[f'(x)]'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)+f''(x)+xf'''(x)}{f''(x)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{xf'''(x)}{f''(x)}\right)=2+0=2.$

*****54.** **α) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση με $g(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).**

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι δυό φορές παραγωγίσιμη στο IR και για την οποία ισχύει $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ (1). Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=e^x g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

(Partie du Bac. D. Toulouse)

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Είναι:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-\alpha)-[f(x)-f(\alpha)]}{(x-\alpha)^2} \text{ ή } g'(x)=\frac{1}{x-\alpha}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] \quad (1)$$

Για την συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha,x]$ $x \in (\alpha,\beta]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,x)$ τέτοιο που $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. Έτσι η (1) γράφεται $g'(x)=\frac{1}{x-\alpha}[f'(x)-f'(\xi)]$ (2).

Είναι όμως $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) γεγονός που σημαίνει ότι για $\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi) > 0$. Έτσι η (2) δίνει $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

β) Είναι $f(x)=e^x g(x)$ ή $g(x)=e^{-x}f(x) \Rightarrow g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow g''(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x)-e^{-x}f'(x)+e^{-x}f''(x) \Leftrightarrow g''(x)=$ $=e^{-x}(f''(x)-2f'(x)+f(x)) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g''(x)=e^{-x}\cdot 0 \Leftrightarrow g''(x)=0.$

'Αρα $g'(x)=\alpha$ και $g(x)=\alpha x+\beta$ (α,β σταθεροί αριθμοί). Η g ως γραμμική συνάρτηση έχει διάγραμμα ευθεία που φυσικά δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

***55. α) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{3-\ln x}{1+\ln x}$.

i) Να υπολογισθεί η τιμή $f(x_0)$ όπου x_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$.

ii) Να δειχθεί ότι η f δεν είναι μονότονη.

iii) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2} P(x)dx$ όπου $P(x)=2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1$.

(Bac. Nancy-Bac. Mexico)

Λύση:

α) i) 'Εχουμε $f(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{3-\ln x}{1+\ln x}=2 \Leftrightarrow 3-\ln x=2(1+\ln x) \Leftrightarrow 3\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x_0=e^{1/3}$ (προφανώς είναι:

$$1+\ln x\neq 0 \Leftrightarrow \ln x\neq -1 \Leftrightarrow \ln x\neq \ln e^{-1} \Leftrightarrow x\neq \frac{1}{e}\ ).$$

$$\text{'Αρα}\quad f(x_0)=\frac{3-\ln e^{1/3}}{1+\ln e^{1/3}}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}.$$

ii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ (πρέπει να είναι $x>0$ και $1+\ln x\neq 0$). 'Εχουμε:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(3-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\frac{-4}{x(1+\ln x)^2}$$

Προφανώς είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$, $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ επομένως δεν είναι μονότονη.

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{x(1+\ln x)^2}=0$.

vi) 'Εχουμε: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} P(x)dx=\int_0^{\pi/2}(2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1)dx=\int_0^{\pi/2}[\eta\mu x-(1-2\eta\mu^2x)]dx=$

$$=\int_0^{\pi/2}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x)dx=\int_0^{\pi/2}\eta\mu x dx-\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu 2x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\ [\eta\mu 2x]_0^{\pi/2}=1$$

***56. α) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g. Υποθέτουμε ότι ορίζεται η $g\circ f$ που είναι παραγωγίσιμη, ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω, και ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα πάνω. Να δειχθεί ότι η $g\circ f$ στρέφει τα κοίλα πάνω.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$, $g(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν οι f,g έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας και στρέφουν τα κοίλα πάνω, να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h=f\cdot g$ στρέφει τα κοίλα πάνω στο (α,β).

(Bac. Limoge)

Λύση:

α) 'Εχουμε $(g\circ f)'(x)=[g(f(x))]'=g'(f(x))f'(x)$ και $(g\circ f)''(x)=$
$=[g'(f(x))f'(x)]'=[g'(f(x))]'f'(x)+g'(f(x))[f'(x)]'=g''(f(x))[f'(x)]^2+$
$+g'(f(x))f''(x)$. 'Αρα $(g\circ f)''(x)=g''(f(x))[f'(x)]^2+g'(f(x))f''(x)$ (1)

Από την υπόθεση είναι $f''(x)<0$ (η f στρέφει τα κοίλα κάτω) $g'(f(x))<0$ (η g είναι γνησίως φθίνουσα) και $g''(f(x))>0$ (η g στρέφει τα κοίλα πάνω). 'Αρα είναι (από (1)): $(g\circ f)''(x)>0$ που σημαίνει ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω.

β) 'Εχουμε $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ οπότε είναι:

$h'(x)=[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \Rightarrow h''(x)=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]'=$
$=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=$
$=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=\underbrace{[f''(x)g(x)+f(x)g''(x)]}_{A}+$
$+2f'(x)g'(x)$ (1)

Επειδή οι f,g στρέφουν τα κοίλα πάνω είναι $f''(x)>0$, $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Είναι και $f(x)>0$, $g(x)>0$ (από την υπόθεση) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. 'Αρα η παράσταση A στη σχέση (1) είναι θετική. Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $f'(x)g'(x)>0$. 'Ετσι έχουμε από την (1) ότι $h''(x)>0$. 'Αρα η h στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (α,β).

***57. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln(|x|+1)$.

i) Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο x_0 του $[-1,1]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο ενώ είναι $f'(x_0)\neq 0$.

iii) Να υπολογισθεί το $\displaystyle\int_0^1 f'(x)dx$.

('Ασκηση σύνθεσης)

Λύση:

i) Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως σύνθεση των συνεχών στο $[-1,1]$ συναρτήσεων $h(x)=|x|+1$ και $g(x)=\ln x$.

αι $f(-1)=\ln 2=f(1)$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x) & \text{αν } x\in[-1,0)\\ \ln(1+x) & \text{αν } x\in[0,1]\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)\cup(0,1)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}(1-x)'=\frac{1}{x-1} & \text{αν } x\in(-1,0)\\ \frac{1}{x+1}(x+1)'=\frac{1}{x+1} & \text{αν } x\in(0,1)\end{cases}$$

ετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Είναι:

$$(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)-\ln1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{[\ln(1-x)]'}{x'}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}(1-x)'=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=-1.$$

και ακόμα: $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln1}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=$

$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}=1$. Επειδή $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ δεν υπάρχει η $f'(0)$. Έτσι η δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Άρα το θ. Rolle δεν ισχύει.

ii) Παρατηρούμε ότι: $f'(x)=\frac{1}{x-1}<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $(x)=\frac{1}{x+1}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα ο διάστημα $(-1,0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$.

Επιπλέον η f ορίζεται στο σημείο $x_0=0$ και είναι $f(0)=\ln1=0$.

Άρα η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι $f'(0)\neq0$ εφ'όσον η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Έτσι ιπόν υπάρχει σημείο $x_0=0$ του $[-1,1]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ρότατο ενώ στο σημείο αυτό δεν μηδενίζεται η $f'(x)$.

iii) Είναι $\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=[\ln(x+1)]_0^1=\ln2-\ln1=\ln2$.

*****58. α) i) Να υπολογισθεί μια συνάρτηση $\psi=f(x)$ αν είναι γνωστό ότι** $\psi'-\psi\ln\psi=0$ (1) ($x>0$, $\psi>0$, $\ln\psi>0$).

ii) Να υπολογισθεί το $\int_1^e f_0(x)dx$ όπου $f_0(x)$ μια λύση της (1) που αντιστοιχεί στις τιμές $x=1$, $\psi=e$.

β) Θεωρούμε μια συνάρτηση που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR

για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=0$ (3)

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$ είναι σταθερή ($x\in\mathbb{R}$).

ii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι σταθερή ($x\in\mathbb{R}$).

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Η (1) γράφεται (είναι $\psi\ln\psi\neq0$).

$$\frac{1}{x}-\frac{\psi'}{\psi\ln\psi}=0\iff\frac{1}{x}=\frac{\psi'}{\psi\ln\psi}\iff(\ln x)'=[\ln(\ln\psi)]'\iff\ln x-\ln[\ln\psi]=\ln c,$$

$$(c>0)\iff\ln x-\ln c=\ln(\ln\psi)\iff\ln\frac{x}{c}=\ln(\ln\psi)\iff\ln\psi=\frac{x}{c}\text{ ή}$$

$\psi=e^{x/c}$ (2).

ii) Η (2) για $x=1$, $\psi=e$ δίνει $e=e^{1/c}\Rightarrow c=1$. Έτσι έχουμε:

$\psi=f_0(x)=e^x$. Άρα $\int_1^e f_0(x)dx=\int_1^e e^x dx=[e^x]_1^e=e^e-e$.

β) i) Έχουμε $f''(x)+f(x)=0\iff 2f'(x)f''(x)+2f'(x)f(x)=0$ ή

$[[f'(x)]^2+[f(x)]^2]'=0$ ή $g(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2=c\xRightarrow{x=0}$

$$[[f'(0)]^2+[f(0)]^2]=c\xRightarrow{(3)}c=0$$

Άρα $g(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2=0$ (4).

ii) Από την (4) προκύπτει ότι $f(x)=f'(x)=0$.

****59. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ που είναι δυό φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Έστω ότι για ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι $f(x_0)>0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$.**

(Πόρισμα)

Λύση:

Επειδή υπάρχει η f'' τότε υπάρχει και η f'.

Επειδή οι f, f' είναι παραγωγίσιμες, είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Το θεώρημα Μέσης τιμής για την f εφαρμόζεται στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,\beta)$

$$\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=f'(\xi_1)\ (1),\quad\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=f'(\xi_2)\ (2)$$

Οι (1) και (2) επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$ δίνουν

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)}{x_0-\alpha} \quad (3) \quad , \quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_0)}{x_0-\beta} \quad (4)$$

$\alpha<\xi_1<x_0<\xi_2<\beta$. Για την f' ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi)$$

ή λόγω των (3) και (4):

$$f''(\xi)=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{f(x_0)}{x_0-\beta}-\frac{f(x_0)}{x_0-\alpha}\right]=-\frac{f(x_0)}{\xi_2-\xi_1}\left[\frac{1}{\beta-x_0}+\frac{1}{x_0-\alpha}\right]=$$

$$=\frac{-f(x_0)(\beta-\alpha)}{(\xi_2-\xi_1)(\beta-x_0)(x_0-\alpha)}<0.$$

(διότι $f(x_0)>0$, $\beta>\alpha$, $\xi_2>\xi_1$, $\beta>x_0$, $x_0>\alpha$).
Έτσι λοιπόν υπάρχει σημείο $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$.

*****60. α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο συνεχή. Έστω ότι στο σημείο x_1 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ στο συνεχόμενό του σημείο x_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής μεταξύ των x_1,x_2.**

β) Να δειχθεί ότι $\alpha^x\beta^{1-x}<\alpha x+(1-x)\beta$ (1) για κάθε $x\in[0,1]$, $\alpha,\beta>0$, $\alpha\neq\beta$.

(Παν/μιο Ιωαννίνων)

Λύση:

α) Επειδή η f στο x_1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο θα είναι $f''(x_1)>0$. Επειδή δε στο x_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο θα είναι $f''(x_2)<0$. Επειδή η f'' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και $f''(x_1)\cdot f''(x_2)<0$ θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος που $f''(\xi)=0$. (θ. Bolzano). Στην περιοχή όμως του ξ η f'' αλλάζει πρόσημο. Άρα το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha^x\beta^{1-x}-\alpha x-(1-x)\beta$ με $x\in[0,1]$. Είναι $f'(x)=\alpha^x(\ln\alpha)\beta^{1-x}-\alpha^x\beta^{1-x}\ln\beta-\alpha+\beta=\alpha^x\beta^{1-x}\ln\frac{\alpha}{\beta}-\alpha+\beta \Rightarrow f''(x)=$
$=\ln\frac{\alpha}{\beta}\left[\alpha^x(\ln\alpha)\beta^{1-x}-\alpha^x\beta^{1-x}\ln\beta\right]=\alpha^x\beta^{1-x}\ln\frac{\alpha}{\beta}\ln\frac{\alpha}{\beta}=\alpha^x\beta^{1-x}\left[\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2$
>0 για κάθε $x\in[0,1]$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα [0,1] με

$f(0)=f(1)=0$, οπότε η f είναι αρνητική* στο [0,1], δηλαδή είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Έτσι η (1) ισχύει.

******61. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια που $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Να δειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.**

Λύση:

Είναι $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0 \Leftrightarrow$ (για κάθε $\varepsilon>0$ άρα και για $\frac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει αριθμός $\delta>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$, με $x>\delta$ να ισχύει:
$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1)).

Το θεώρημα της Μέσης τιμής ισχύει για την f στο διάστημα $[\delta,x]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(\delta,x)$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{f(x)-f(\delta)}{x-\delta}=f'(\xi) \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(\delta)}{x-\delta}\right|=|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

(λόγω της (1) εφ'όσον $\xi>\delta$). Για κάθε $x>\delta$ ισχύει:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(\delta)+f(\delta)}{x}\right|\leq\left|\frac{f(x)-f(\delta)}{x}\right|+\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(\delta)}{x-\delta}\right|\cdot\frac{|x-\delta|}{x}$$

$$+\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|\overset{(2)}{<}\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{x-\delta}{x}\right|+\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|$$

Άρα $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|$ (3).

Είναι όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\delta)}{x}=0$, ($f(\delta)$ σταθερός). Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\delta)}{x}=0 \Leftrightarrow$

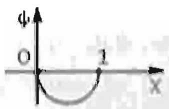
(Για κάθε $\varepsilon>0$ άρα και για $\frac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ με $x>\delta_1$ να ισχύει $\left|\frac{f(\delta)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$). Έστω $\delta_2>\max(\delta_1,\delta)$.
Τότε για κάθε $x\in A$ με $x>\delta_2$ η (3) δίνει:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \text{ Άρα } \left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$$

Επομένως $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

---

* Το διάγραμμα της f θα είναι της μορφής:



***62. α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και για την οποία ισχύει $|xf(x)| \leq |x-\varepsilon\varphi x|$ (1) για κάθε $x \in (-1,1)$. Να δειχθεί ότι $f(0)=0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ που για κάθε $x \in (-1,1)$ ικανοποιεί την σχέση $-\varepsilon\varphi^2 x \leq f(x)-x \leq \varepsilon\varphi^2 x$ (2). Να δειχθεί ότι:

i) Η f είναι συνεχής στο 0.

ii) $f'(0)=1$.

('Ασκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Για $x \neq 0$ η (1) γράφεται $|f(x)| \leq \dfrac{|x-\varepsilon\varphi x|}{|x|}$ ή $|f(x)| \leq \left|1-\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right|$ (2)

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}1-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}=1-1=0$. 'Ετσι η (2) δίνει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι και $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0) \Leftrightarrow 0=f(0)$.

β) i) Η (2) γράφεται $x-\varepsilon\varphi^2 x \leq f(x) \leq x+\varepsilon\varphi^2 x$ (3) $\xRightarrow{x=0} 0 \leq f(0) \leq 0$ $\Rightarrow f(0)=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}(x-\varepsilon\varphi^2 x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}(x+\varepsilon\varphi^2 x)=0$. 'Αρα η (3) δίνει:

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 'Ετσι έχουμε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 'Αρα η f είναι συνεχής στο 0.

ii) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ (4). Η (3) γράφεται για κάθε $x \in (0,1)$:

$1-\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{x} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq 1+\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{x}$ (5). Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}1-\lim_{x\to0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\lim_{x\to0^+}\varepsilon\varphi x=1-1\cdot0=1.$$

Είναι και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{x}\right)=1$. 'Ετσι έχουμε από την (5) (ιδιότητα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων): $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 'Αρα είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 'Ετσι η (4) δίνει $f'(0)=1$.

***63. α) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ η οποία στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα (α,β) και για την οποία είναι $f(\alpha)=f(\beta)$. Να δειχθεί ότι η f έχει ολικό ακρότατο στο (α,β).

β) Θεωρούμε την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,-1] \to \mathbb{R}$ που στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty,-1]$. Αν $f'(-1)=f(-1)=0$, να δειχθεί ότι:

i) Η συνάρτηση $h(x)=xf'(x)-f(x)$ (1) είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

Λύση:*

α) Για την f ισχύει το θ. του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. 'Αρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο που $f'(\xi)=0$ (1).

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα (α,β) είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). 'Εστω $x \in (\alpha,\xi)$. 'Εχουμε ότι:

$$x < \xi \xRightarrow{f'\uparrow} f'(x) < f'(\xi) \xRightarrow{(1)} f'(x) < 0.$$

'Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,ξ). 'Εστω $x \in (\xi,\beta)$. Είναι:

$$\xi < x \xRightarrow{f'\uparrow} f'(\xi) < f'(x) \xRightarrow{(1)} 0 < f'(x).$$

'Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (ξ,β).

Επειδή το ξ είναι και ρίζα της πρώτης παραγώγου που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο (ελάχιστο) στο (α,β).

β) i) Είναι $h'(x)=x'f'(x)+x f''(x)-f'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$. 'Αρα $h'(x)=xf''(x)$ (2).

Επειδή όμως είναι $f''(x) < 0$ (η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,-1]$) και $x < 0$, η (2) δίνει: $h'(x) > 0$. 'Αρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Είναι $g'(x)=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \overset{(1)}{=} \dfrac{h(x)}{x^2} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ (3)

Είναι όμως h ↑. 'Αρα για $x < -1 \Rightarrow h(x) < h(-x) \xRightarrow{(1)} h(x) < -1f'(-1)-f(-1) \Rightarrow h(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1]$.

'Αρα $\dfrac{h(x)}{x^2} < 0$, οπότε η (3) δίνει $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1]$.

Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα.

* Η άσκηση αυτή δόθηκε το 1963 ως θέμα τμηματικών εξετάσεων στο Ε.Μ.Π. από τον αείμνηστο καθηγητή **Φ. Βασιλείου**.

****64.** α) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(\alpha)=g(\beta)=\alpha$, $f(\beta)=g(\alpha)=\beta$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $g(f(\xi))+f(g(\xi))=2\xi$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x\sqrt{|x|} & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=0$.

(Μαθηματικό Αθηνών)

Λύση:

α) Προφανώς οι gof, fog ορίζονται έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ και είναι συνεχείς. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=g(f(x))+f(g(x))-2x$ που είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

$h(\alpha)h(\beta)=[g(f(\alpha))+f(g(\alpha))-2\alpha][g(f(\beta))+f(g(\beta))-2\beta]=[g(\alpha)+f(\beta)-2\alpha][g(\beta)+f(\alpha)-2\beta]=(2\beta-2\alpha)(2\alpha-2\beta)=4(\beta-\alpha)(\alpha-\beta)=-4(\alpha-\beta)^2<0$. Έτσι λοιπόν το θεώρημα Bolzano-Weierstrass ισχύει. Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $h(\xi)=0$ $\Leftrightarrow g(f(\xi))+f(g(\xi))-2\xi=0$.

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0 \\ \text{ή} \\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0\end{cases}$

Άρα $f'(0)=0$.

*****65. α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)f''(x)>0$ (1) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια ρίζα το πολύ στο διάστημα (α,β).**

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)|\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

γ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(x)=f'(x)$ (3) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(0)=2$ να δειχθεί ότι $f(x)=2e^x$.

('Ασκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Υποθέτουμε ότι η $f'(x)=0$ έχει δύο ρίζες $\alpha<\rho_1<\rho_2<\beta$. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x)=f(x)f'(x)$, $x\in[\rho_1,\rho_2]$.

Η F είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως γινόμενο συνεχών (η f είναι συνεχής εφ'όσον παραγωγίζεται και η f' είναι συνεχής εφ'όσον υπάρχει η f'').

Η F παραγωγίζεται στο (ρ_1,ρ_2) και είναι:

$$F'(x)=f'(x)f'(x)+f(x)f''(x)=[f'(x)]^2+[f(x)f''(x)] \quad (2)$$

Είναι ακόμα $F(\rho_1)=f(\rho_1)f'(\rho_1)=0$ και $F(\rho_2)=f(\rho_2)f'(\rho_2)=0$.

Άρα $F(\rho_1)=F(\rho_2)=0$. Επομένως το θ. του Rolle ισχύει για την συνάρτηση F στο (ρ_1,ρ_2). Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιος που:

$$F'(\xi)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} [f'(\xi)]^2+f(\xi)f''(\xi)=0$$

που είναι άτοπο διότι $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Έτσι λοιπόν η $f'(x)=0$ έχει μια ρίζα το πολύ στο (α,β).

β) Είναι $|f(x)|\le x^2 \xrightarrow{x=0} |f(0)|\le 0 \Rightarrow f(0)=0$.

Είναι ακόμα $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ (1).

Ισχύει ότι: $|f(x)|\le x^2 \Rightarrow \dfrac{|f(x)|}{|x|}\le\dfrac{x^2}{|x|}=\dfrac{|x|^2}{|x|}=|x|$ (2)

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ προκύπτει από την (2) ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Έτσι η (1) δίνει $f'(0)=0$.

γ) Η αποδεικτέα $f(x)=2e^x$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα να θεωρήσουμε τον λόγο $\dfrac{f(x)}{e^x}$. Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτησή $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Είναι: $h'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}\overset{(3)}{=}\dfrac{f(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x)=0$. Άρα $h(x)=c$. Έτσι είναι $\dfrac{f(x)}{e^x}=c$ ή

$f(x)=ce^x \xrightarrow{x=0} f(0)=ce^0 \Rightarrow f(0)=c \Rightarrow 2=c$. Άρα $f(x)=2e^x$.

****66. Δίνεται η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=|A^2|$ όπου**

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & x\sqrt{2} & 3\\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 1 & x\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να δειχθεί ότι η h είναι συνεχής.

ii) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $f'(-\alpha)=-f(-\alpha)$ και $f'(\alpha)=f(\alpha)$ (1) όπου $\alpha=|A^2|$.

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} tf''(t)dt=0$.

(Θέμα εξετάσεων)

Λύση:

i) Είναι $A^2=A\cdot A=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & x\sqrt{2} & 3\\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 1 & x\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & x\sqrt{2} & 3\\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 1 & x\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}=$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2-x}{2} & x\sqrt{2} & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-x}{2} & x\sqrt{2} & \frac{2+x}{2} \end{bmatrix} \quad . \text{ 'Αρα:}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} \frac{2-x}{2} & x\sqrt{2} & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x}{2} & x\sqrt{2} & \frac{2+x}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2-x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{-x}{2} & \frac{2+x}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

'Αρα $h(x)=1$ με $x \in \mathbb{R}$. Η h ως σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής.

ii) 'Εχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} tf''(t)dt = \int_{-1}^{1} t[f'(t)]'dt = [tf'(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t'f'(t)dt =$

$= f'(1)+f'(-1) - \int_{-1}^{1} f'(t)dt = f'(1)+f'(-1)-[f(t)]_{-1}^{1} = f'(1)+f'(-1)-f(1)+f(-1) =$

$\overset{(1)}{=} f(1)-f(-1)-f(1)+f(-1)=0.$

67. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει η $f''(x)$ και για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=x-e^{2x}-1+f'(x)$ (1)

$f(x)=x+\frac{1}{4}f''(x)$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει η $f'''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να δειχθεί ότι $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}e^2$

('Ασκηση σύνθεσης)

Λύση:

Θα βρούμε τον τύπο της f.

Η (1) με παραγώγιση δίνει $f'(x)=1-2e^{2x}+f''(x) \Leftrightarrow f''(x)=f'(x)-1+2e^{2x}$ (3). Η (2) λόγω της (3) δίνει: $f(x)=x+\frac{1}{4}[f'(x)-1+2e^{2x}]$ ή $f(x)=x+\frac{1}{4}f'(x)-\frac{1}{4}+\frac{e^{2x}}{2} \Leftrightarrow f'(x)=4f(x)-4x+1-2e^{2x}$ (4).

Η (1) λόγω της (4) δίνει $f(x)=x-e^{2x}-1+4f(x)-4x+1-2e^{2x}$ ή $-3f(x)=$ $=-3x-3e^{2x} \Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+x.$

i) Η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων με τύπους $h(x)=e^{2x}$, $g(x)=x$.

ii) Είναι $f'(x)=2e^{2x}+1$, $f''(x)=4e^{2x}$ οπότε είναι $f'''(x)=8e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Είναι $\int_0^1 (e^{2x}+x)dx = \int_0^1 e^{2x}dx + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2$.

***68. α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής.

Αν ισχύει $f(x)=\frac{e^{3x}-3x-1}{x^2}$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ να ορισθεί ο τύπος της.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=g(x)|x-\rho|$ όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και $g(x)$ πολυώνυμο βαθμού ν. Με την προϋπόθεση ότι η f είναι παραγωγίσιμη να δειχθεί ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $g(x)$.

(U. of. L.)

Λύση:

α) Η (1) δεν ορίζεται για $x=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο σημείο $x_0=0$. 'Εχουμε $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$. Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x}-3x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3e^{3x}-3}{2x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(3e^{3x}-3)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{2} =$

$= \frac{9}{2}$. 'Αρα είναι και $f(0)=\frac{9}{2}$.

'Ετσι ο τύπος της f είναι $f(x)=\begin{cases} \frac{e^{3x}-3x-1}{x^2} & \text{αν } x\neq 0 \\ \frac{9}{2} & \text{αν } x=0 \end{cases}$

β) 'Εχουμε $f(x)=\begin{cases} g(x)(x-\rho) & \text{αν } x \geq \rho \\ -g(x)(x-\rho) & \text{αν } x < \rho \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=\rho$. Θα βρούμε τον παράγωγο αριθμό $f'(\rho)$. Ισχύει ότι:

$f'_{\alpha}(\rho) = \lim_{x\to\rho^-}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho} = \lim_{x\to\rho^-}\frac{-g(x)(x-\rho)}{x-\rho} = -\lim_{x\to\rho^-} g(x) = -g(\rho).$

$f'_{\delta}(\rho) = \lim_{x\to\rho^+}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho} = \lim_{x\to\rho^+}\frac{g(x)(x-\rho)}{x-\rho} = \lim_{x\to\rho^+} g(x) = g(\rho).$

Άρα $g(\rho)=-g(\rho) \Rightarrow g(\rho)=0$. Επομένως το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $g(x)$.

*****69. α)** Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\int_1^x (\ln t-3)dt.$$

Να δειχθεί ότι:

i) Η f είναι συνεχής.

ii) Η f δεν είναι μονότονη.

iii) Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

iv) Η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(0,+\infty)$.

β) Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)dt & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

όπου $h(t)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ με $h(0)=0$, $h'(0)=0$.

(Bac.Limoges)

Λύση:

α) Έχουμε $f(x)=\int_1^x (\ln t-3)dt=\int_1^x \ln t dt-3\int_1^x dt=\int_1^x t'\ln t dt-3[t]_1^x=$

$=[t\ln t]_1^x-\int_1^x t(\ln t)'dt-3(x-1)=x\ln x-1\ln 1-\int_1^x t\frac{1}{t}dt-3(x-1)=$

$=x\ln x-\int_1^x dt-3x+3=x\ln x-3x+3-[t]_1^x=x\ln x-3x+3-x+1=x\ln x-4x+4.$

Άρα $f(x)=x\ln x-4x+4$.

i) Η f όπως προκύπτει από τον τύπο της είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

ii) Είναι $f'(x)=\ln x+1-4=\ln x-3$. Είναι $\ln x-3>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^3 \Leftrightarrow x>e^3$ και $\ln x-3<0 \Leftrightarrow x<e^3$. Έτσι το πρόσημο της $f'(x)$ είναι:

0		e^3		$+\infty$
	$-$		$+$	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,e^3)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(e^3,+\infty)$.

Επομένως δεν είναι μονότονη.

iii) Για $x=e^3$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(e^3)$ το οποίο είναι ολικό.

iv) Είναι $f''(x)=(\ln x-3)'=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $\frac{1}{x^2}$, $\int_0^x h(t)dt$. Στο σημείο $x_0=0$ είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x h(t)dt}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x h(t)dt)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{2}=\frac{h'(0)}{2}=0=f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

*****70.** α) i) Να δειχθεί ότι $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

ii) Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με α_ν: $\begin{cases} \alpha_1=\alpha, & \alpha>e \\ \alpha_{\nu+1}=\ln(\alpha_\nu^e) & (\Sigma) \end{cases}$

Να δειχθεί ότι $\lim\alpha_\nu=e$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=\frac{1}{e}$

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x)=e\ln x-x$. Είναι $f'(x)=\frac{e}{x}-1=\frac{e-x}{x}$. Είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e-x}{x}>0$ $\Leftrightarrow e-x>0 \Leftrightarrow e>x$. Είναι ακόμα $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$. Άρα η f για $x=e$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(e)=e\ln e-e=e\cdot 1-e=0$. Επομένως είναι $f(x) \le f(e)$ $\Leftrightarrow f(x) \le 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα:

$e\ln x-x \le 0 \Leftrightarrow e\ln x \le x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln x \le x$ (1) για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ii) Θα δείξουμε ότι η (α_ν) είναι μονότονη και φραγμένη. Προφανώς είναι $\alpha_\nu^e>0$. για κάθε $\nu=1,2,3...$. Είναι $\alpha_{\nu+1}=\ln\alpha_\nu^e=e\ln\alpha_\nu \le \alpha_\nu$ (λόγω της (1) του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η (α_ν) είναι φθίνουσα επομένως άνω φραγμένη. Θα δείξουμε ότι η (α_ν) είναι κάτω φραγμένη. Επειδή είναι $e<\alpha=\alpha_1$ θα εξετάσουμε (επαγωγικά) μήπως είναι $e<\alpha_\nu$ (2) για κάθε $\nu=1,2,3...$

Η (2) για $\nu=1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει η $e<\alpha_\kappa$ (3). Θα δείξουμε

ότι $e < \alpha_{\kappa+1}$ (4). Η (3) γράφεται $\ln e < \ln\alpha_\kappa \Leftrightarrow e\ln e < e\ln\alpha_\kappa \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e < \ln\alpha_\kappa^e \Leftrightarrow e < \alpha_{\kappa+1}$.

Άρα η (α_ν) είναι κάτω φραγμένη (άρα και φραγμένη). Η (α_ν) ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει. Έστω $\lim\alpha_\nu=\ell$.

Η (Σ) δίνει $\lim\alpha_{\nu+1}=\lim(\ln\alpha_\nu^e)$ ή $\lim\alpha_{\nu+1}=e\ln(\lim\alpha_\nu)$ ή

$\ell=e\ln\ell \Leftrightarrow \ell=e$. Άρα $\lim\alpha_\nu=e$.

β) Το σημείο επαφής είναι το $(x_0,f(x_0))=\left(\frac{1}{e},\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\right)$.

Έχουμε: $f'(x)=(x^x)' \Rightarrow f'(x)=x^x(\ln x+1) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=$

$=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\left(\ln\frac{1}{e}+1\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}(\ln1-\ln e+1)\Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow \psi=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$$

***71. α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & \text{αν } x\neq0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Δίνεται και ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\frac{\sqrt{4\nu^4-5\nu}}{\nu^2+3}$.

Αν $A=\begin{bmatrix}\lim\beta_\nu & \lim\limits_{x\to0}f(x)\\ \lim\limits_{x\to0}f(x) & \lim\beta_\nu\end{bmatrix}$ να υπολογισθεί η παράσταση $A^\nu-A^2+I_2$ (1).

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta e^x x\,dx$ όπου α,β (α < β) είναι οι τιμές της ορίζουσας |B|, (B πίνακας 3×3) για την οποία ισχύει: $||B|B|=81$.

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο IR είναι και συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Έτσι είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ ή $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=f(0)$ ή $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=0$.

Είναι ακόμα:

$$\lim\beta_\nu=\lim\frac{\sqrt{4\nu^4-5\nu}}{\nu^2+3}=\lim\frac{2\nu^2\sqrt{1-\frac{5\nu}{4\nu^4}}}{\nu^2\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)}=2\lim\frac{\sqrt{1-\frac{5}{4\nu^3}}}{\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)}=2.$$

Έτσι είναι $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2I_2$. Είναι ακόμα:

$$A^2=A\cdot A=2I_2\cdot2I_2=4I_2^2=2^2I_2.$$

Θα δείξουμε ότι $A^\nu=2^\nu I_2$ (2). Η (2) για ν=1 ισχύει.
Έστω ότι η (2) ισχύει για ν=κ: $A^\kappa=2^\kappa I_2$ (3). Θα δείξουμε ότι η (2) ι-σχύει για ν=κ+1 δηλαδή ότι $A^{\kappa+1}=2^{\kappa+1}I_2$. Έχουμε:

$$A^{\kappa+1}=A^\kappa A=2^\kappa I_2\cdot2I_2=2^{\kappa+1}I_2^2=2^{\kappa+1}I_2.$$

Έτσι η (2) ισχύει για κάθε ν=1,2,3,... Η (1) γράφεται:

$$2^\nu I_2-2^2I_2+I_2=(2^\nu-2^2+1)I_2=(2^\nu-3)I_2$$

β) Έστω ότι $B=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}$. Είναι:

$$|B|B=\begin{bmatrix}\alpha_{11}|B|&\alpha_{12}|B|&\alpha_{13}|B|\\ \alpha_{21}|B|&\alpha_{22}|B|&\alpha_{23}|B|\\ \alpha_{31}|B|&\alpha_{32}|B|&\alpha_{33}|B|\end{bmatrix}$$

Άρα $||B|B|=|B||B|^3=|B|^4$. Επομένως είναι $|B|^4=81$ ή $|B|=\pm3$. Έτσι έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta e^x x\,dx=\int_{-3}^{3}(e^x)'x\,dx=[e^xx]_{-3}^{3}-\int_{-3}^{3}e^xx'\,dx=[e^xx]_{-3}^{3}-\int_{-3}^{3}e^x\,dx=[e^xx]_{-3}^{3}-[e^x]_{-3}^{3}=\ldots$$

***72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{e^{\nu x}+1}$, ν=1,2,3,...

i) Να δειχθεί ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

ii) Να υπολογισθεί το $\int_1^2\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{e^{\nu x}+1}\,dx$.

iii) Θεωρούμε την ακολουθία:

$$\alpha_\nu: \begin{cases} \alpha_1=3 \\ \alpha_{\nu+1}=f(\alpha_\nu) \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* \\ \alpha_\nu > 2 \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η (α_ν) δεν είναι φραγμένη άνω.

(Ε.Μ.Π.)

Λύση:

Θα διαμορφώσουμε τον τύπο της συνάρτησης.

1. Έστω $x > 0$ τότε $(\nu x) \to +\infty \Rightarrow e^{\nu x} \to +\infty$.

Είναι επομένως: $\sqrt[\nu]{e^{\nu x}+1}=\sqrt[\nu]{e^{\nu x}\left(1+\frac{1}{e^{\nu x}}\right)}=e^x\sqrt[\nu]{1+\frac{1}{e^{\nu x}}} \to e^x\cdot 1=e^x$.

2. Έστω $x=0$ τότε είναι $\sqrt[\nu]{1+e^{\nu x}} \overset{x=0}{=\!=} \sqrt[\nu]{1+e^0}=\sqrt[\nu]{2} \to 1$.

3. Έστω $x < 0$ τότε $\nu x \to -\infty$ οπότε $e^{\nu x} \to 0$. Επειδή $e^{\nu x}+1 \to 0+1=1>0$ είναι και $\sqrt[\nu]{e^{\nu x}+1} \to 1$.

Έτσι λοιπόν ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (-\infty,0] \\ e^x & \text{αν } x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

i) Είναι $f'_\alpha(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}0=0$ και

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

ii) Είναι $\int_1^2 \lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{e^{\nu x}+1}\,dx=\int_1^2 e^x dx=[e^x]_1^2=e^2-e$.

iii) Είναι $f(\alpha_\nu)=e^{\alpha_\nu}$ (διότι $\alpha_\nu > 2$).

Άρα $\alpha_{\nu+1}=e^{\alpha_\nu}$. Είναι γνωστό ότι $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $e^{\alpha_\nu} \geq 1+\alpha_\nu \Rightarrow \alpha_{\nu+1} \geq 1+\alpha_\nu > \alpha_\nu$. Άρα $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$. Επομένως η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

Η (α_ν) ως γνησίως αύξουσα είναι κάτω φραγμένη.

* Είναι γνωστό ότι $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \to 1$ όταν $\alpha_\nu \to \alpha > 0$. Επειδή $1+\frac{1}{e^{\nu x}} \to 1+0=1 > 0$ είναι $\sqrt[\nu]{1+\frac{1}{e^{\nu x}}} \to 1$.

Έστω ότι η (α_ν) είναι άνω φραγμένη. Τότε η (α_ν) συγκλίνει. Υποθέτουμε ότι $\lim\alpha_\nu=\ell$, $(\ell \in \mathbb{R})$.

Έχουμε $\lim \alpha_{\nu+1}=\lim f(\alpha_\nu)$ ή $\lim\alpha_{\nu+1}=\lim e^{\alpha_\nu}$ ή $\ell=e^\ell$

που είναι αδύνατο εφ' όσον $e^\ell \geq 1+\ell$.

Άρα η (α_ν) δεν είναι άνω φραγμένη.

*****73. α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|}{1+2^{1/x}} & \text{αν } x\neq0 \\ 3 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια στο σημείο $x_0=0$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\frac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$ με $\lambda\leq-1$

i) Για ποιές τιμές του λ η φ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;

ii) Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu=\frac{ue^{2\nu}-(u-1)}{(1+e^\nu)e^\nu}$ να δειχθεί ότι συγκλίνει και ότι $\lim\alpha_\nu=u$, $u \geq 1$.

(Ε.Μ.Π.)

Λύση:

α) Είναι $f(0)=3$.

Θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to0} f(x)$. Θα βρούμε τα πλευρικά όρια.

Έστω $x \to 0^+$. Έχουμε: $\frac{\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|}{1+2^{1/x}} \leq \frac{1}{1+2^{1/x}} \to 0$ (όταν $x \to 0^+$ είναι $\frac{1}{x} \to +\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{1/x}=+\infty$). Επομένως είναι και

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|}{1+2^{1/x}}=0$. Έστω $x \to 0^-$ τότε είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-}2^{1/x}=0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\alpha_\nu=\frac{-1}{2\pi\nu} \to 0$ και $\beta_\nu=\frac{-1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{4}} \to 0$

Έχουμε $f(\alpha_\nu)=\frac{1}{1+2^{-2\pi\nu}}\,|\eta\mu(-2\pi\nu)| \to \frac{1}{1+0}\cdot 0=0$

$$f(\beta_\nu)=\frac{1}{1+2^{-2\pi\nu-\pi/4}}\left|\eta\mu\left(-2\pi\nu-\frac{\pi}{4}\right)\right| \to \frac{1}{1+0}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επομένως το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ δεν υπάρχει. 'Αρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) i) Είναι $\varphi'(x)=\dfrac{\lambda e^{2x}+2(1+\lambda)e^x+(1+\lambda)}{e^x(1+e^x)^2}$

Για να είναι η φ φθίνουσα στο R πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $\varphi'(x) \le 0 \iff \lambda e^{2x}+2(1+\lambda)e^x+(1+\lambda) \le 0$. θέτουμε $e^x=\psi$. Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $\lambda\psi^2+2(\lambda+1)\psi+(\lambda+1) \le 0$ (1). Είναι:

$\Delta=4(\lambda+1)^2-4\lambda(\lambda+1)=4(\lambda+1)$. Για $\lambda \le -1$ είναι $\Delta \le 0$. 'Αρα η (1) ισχύει. 'Ετσι για $\lambda \le -1$ η φ είναι φθίνουσα.

ii) Η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{-ue^x-(1-u)e^{-x}}{(1+e^x)}=\dfrac{-ue^{2x}+(u-1)}{(1+e^x)e^x}$ για $-u \le -1$

είναι φθίνουσα στο IR, (σύμφωνα με το (i) ερώτημα). 'Αρα η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{ue^{2x}-(u-1)}{(1+e^x)e^x}$ είναι αύξουσα στο IR. 'Ετσι η ακολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{ue^{2\nu}-(u-1)}{(1+e^\nu)e^\nu}$ είναι αύξουσα (επομένως κάτω φραγμένη). Επειδή

$$\alpha_\nu=\frac{ue^{2\nu}}{(1+e^\nu)e^\nu}-\frac{u-1^*}{(1+e^\nu)e^\nu} \le \frac{ue^{2\nu}}{(1+e^\nu)e^\nu}=u\,\frac{e^\nu}{1+e^\nu} < u\cdot 1=u.$$

Η (α_ν) είναι άνω φραγμένη. 'Αρα η (α_ν) συγκλίνει. Είναι:

$$\alpha_\nu=u\,\frac{1}{1+\frac{1}{e^\nu}}-(u-1)\,\frac{1}{(1+e^\nu)e^\nu} \to u\,\frac{1}{1+0}-(u-1)\,0=u$$

****74.** α) Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-e^x}{e^x\alpha^e-\ln x}$, $(\alpha\neq 0)$.

β) i) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $\psi=\dfrac{6}{x}$ και τις ευθείες $x=2$, $x=10$.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in [2,10]$ ώστε το ορθογώνιο με πλευρές $\dfrac{6}{x_0}$, και 8 να είναι ισοδύναμο με το χωρίο.

(Ε.Μ.Π)

Λύση:

α) 'Οταν $x \to +\infty$, τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής της συνάρτησης εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. 'Εχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-e^x}{e^x\alpha^e-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{e^x}-1}{\alpha^e-\frac{\ln x}{e^x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}-1}{\alpha^e-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}-1}{\alpha^e-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}-1}{\alpha^e-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}}=\frac{0-1}{\alpha^e-0}=-\frac{1}{\alpha^e}$$

β) i) Είναι $E=\displaystyle\int_2^{10}\frac{6}{x}\,dx=6\int_2^{10}\frac{dx}{x}=[6\ln x]_2^{10}=6\ln 10-6\ln 2=6(\ln 10-\ln 2)=$

$=6\ln\dfrac{10}{2}=6\ln 5$ (1)

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{6}{x}$ είναι συνεχής στο [2,10], άρα σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in [2,10]$ τέτοιο που:

$$\int_2^{10}\frac{6}{x}\,dx=\frac{6}{x_0}(10-2)=\frac{6}{x_0}\cdot 8 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει η αποδεικτέα.

******75.** θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

i) Ισχύει η ισοδυναμία: "Η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο [α,β]" ⟺ "Η f' είναι αύξουσα στο (α,β)".

ii) Ισχύει η ισοδυναμία: "Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α,β]" ⟺ "Η f' είναι φθίνουσα στο (α,β)".

iii) Η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο (α,β) αν και μόνο αν για κάθε $x,\psi \in [\alpha,\beta]$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει:

$$f[\lambda x+(1-\lambda)\psi] \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(\psi) \quad (1)$$

iv) Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο (α,β) αν και μόνο αν για κάθε $x,\psi \in [\alpha,\beta]$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει:

$$f[\lambda x+(1-\lambda)\psi] \ge \lambda f(x)+(1-\lambda)f(\psi) \quad (2)$$

v) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$ και ότι: $x^\alpha\psi^\beta \le \alpha x+\beta\psi$ όπου $\alpha,\beta \in (0,1)$ με $\alpha+\beta=1$.

(Ε.Μ.Π)

Λύση:

i) "Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [α,β]" ⟺ ($f''(x) \ge 0$ για κάθε

* Είναι $u-1 \ge 0$.

$x \in [\alpha,\beta]) \Leftrightarrow$ (f΄ αύξουσα στο (α,β)).

ii) Δείχνεται ανάλογα.

iii) Αν $x < \psi$ τότε για $\lambda \in (0,1)$ είναι: $x < \lambda x+(1-\lambda)\psi < \psi$.

Αν είναι $x < t < \psi$ τότε υπάρχει $0 < \lambda < 1$ τέτοιος ώστε $t=\lambda x+(1-\lambda)\psi$

Πράγματι τότε έχουμε $t= \frac{\psi-t}{\psi-x} x+ \frac{t-x}{\psi-x} \psi= \frac{\psi-t}{\psi-x} x+\left(1- \frac{\psi-t}{\psi-x}\right) \psi=\lambda x+(1-\lambda)\psi$ όπου $\lambda= \frac{\psi-t}{\psi-x} \in (0,1)$. Έτσι η (1) για $\lambda= \frac{\psi-t}{\psi-x}$ γράφεται:

$$f(t) \leq \frac{\psi-t}{\psi-x} f(x)+\left(1- \frac{\psi-t}{\psi-x}\right) f(\psi) \Leftrightarrow (\psi-x)f(t) \leq (\psi-t)f(x)+(t-x)f(\psi) \qquad (3)$$

Σύμφωνα με την (i) αρκεί να δείξουμε ότι η f΄ είναι αύξουσα στο (α,β) αν και μόνο αν ισχύει η (1).

1) Έστω ότι η f΄ είναι αύξουσα στο (α,β) με $x,\psi \in [\alpha,\beta]$, $x < \psi$ και $t=\lambda x+(1-\lambda)\psi$, $\lambda \in (0,1)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα (x,t) και (t,ψ). Τότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x,t)$ και $\xi_2 \in (t,\psi)$ ώστε $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} =f'(\xi_1)$ και $\frac{f(\psi)-f(t)}{\psi-t} =f'(\xi_2)$. Επειδή η f΄ είναι αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$ ισχύει: $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(\psi)-f(t)}{\psi-t}$

$$\Leftrightarrow \frac{f[\lambda x+(1-\lambda)\psi] -f(x)}{(1-\lambda)(\psi-x)} \leq \frac{f(\psi)-f[\lambda x+(1-\lambda)\psi]}{\lambda(\psi-x)} \Leftrightarrow f[\lambda x+(1-\lambda)\psi] \leq$$

$$\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(\psi).$$

2) Έστω ότι η f ικανοποιεί την (1) και $x,\psi \in (\alpha,\beta)$ με $x < \psi$. Θεωρούμε $0 < h < \frac{1}{2} (\psi-x)$, οπότε $x < x+h < \psi-h < \psi$. Κάνουμε εφαρμογή της (3) για τις τριάδες x, $x+h$, $\psi-h$ και $x+h$, $\psi-h$, ψ οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(\psi-x-h)f(x+h) \leq (\psi-x-2h)f(x)+hf(\psi-h) \\ (\psi-x-h)f(\psi-h) \leq hf(x+h)+(\psi-x-2h)f(\psi)\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{προσθ.}}$$

$$f(x+h)-f(x) \leq f(\psi)-f(\psi-h) \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \leq \frac{f(\psi)-f(\psi-h)}{(h-\psi)+\psi} = \frac{f(\psi-h)-f(\psi)}{(\psi-h)-\psi}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{f(\psi-h)-f(\psi)}{-h} \Rightarrow f'(x) \leq f'(\psi)$$

Άρα η f΄ είναι αύξουσα στο (α,β).

iv) Δείχνεται ανάλογα.

v) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ παραγωγίζεται δυο φορές στο $(0,+\infty)$. Είναι $f'(x)= \frac{1}{x}$ και $f''(x)=- \frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$. Η (2) για $x,\psi \in (0,+\infty)$, $\alpha,\beta \in (0,1)$ με:

$\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1-\alpha$ δίνει:

$$\ln[\alpha x+(1-\alpha)\psi] \geq \alpha\ln x+(1-\alpha)\ln\psi \quad \text{ή}$$

$$\ln(\alpha x+\beta\psi) \geq \ln x^{\alpha}+\ln\psi^{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha x+\beta\psi) \geq \ln(x^{\alpha}\psi^{\beta}) \Leftrightarrow \alpha x+\beta\psi \geq x^{\alpha}\psi^{\beta}.$$

*** * 76. α)** Έστω ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος f΄΄ μιας συνάρτησης f σ΄ένα διάστημα Δ. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$ την εφαπτομένη στο $M_0(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία $N(x,\psi)$ της εφαπτομένης και $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με κοινή τετμημένη $x \in \Delta$. Να αποδειχτεί ότι:

i) Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq \psi$.

ii) Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leq 0$, τότε $f(x) \leq \psi$.

β) Δίνεται ο πίνακας $A= \begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & -\text{ημ}\alpha & 1 \\ \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

να δειχθεί ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

(Άσκηση σύνθεσης)

Λύση:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M_0 έχει εξίσωση:

$$\psi=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Επομένως για κάθε $x \in \Delta$ με $x\neq x_0$ θα έχουμε:

$$f(x)-\psi=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ x και x_0, τέτοιο ώστε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ και έτσι η (1) γράφεται:

$$f(x)-\psi=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0) \qquad (2)$$

Επίσης υπάρχει ξ_1 μεταξύ ξ και x_0, τέτοιο ώστε $f'(\xi)-f'(x_0)=f''(\xi_1)(\xi-x_0)$ και η (2) γίνεται:

$$f(x)-\psi=f''(\xi_1)(\xi-x_0)(x-x_0) \qquad (3)$$

Επειδή όμως το ξ βρίσκεται μεταξύ x και x_0, θα είναι πάντοτε

$$(\xi-x_0)(x-x_0) > 0 \qquad (4)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

i) Για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geq 0$. Τότε θα είναι $f''(\xi_1) \geq 0$, ο-

πότε από την (3), λόγω της (4) θα έχουμε $f(\chi) \geq \psi$.

ii) Για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι $f''(\chi) \leq 0$. Με ανάλογη εργασία βρίσκουμε ότι $f(\chi) \leq \psi$.

β) Είναι $|A| = \begin{vmatrix} συνα & -ημα & 1 \\ ημα & συνα & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = συν^2α + ημ^2α = 1 \neq 0.$

Άρα είναι $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \mathrm{adj}A = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$ όπου

$A_{11} = \begin{vmatrix} συνα & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = συνα$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -ημα & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ημα$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -ημα & 1 \\ συνα & 0 \end{vmatrix} = -συνα$, $A_{12} = -ημα$, $A_{22} = συνα$, $A_{32} = ημα$, $A_{13} = 0$,

$A_{23} = 0$, $A_{33} = 1$.

Έτσι είναι $A^{-1} = \begin{bmatrix} συνα & ημα & -συνα \\ -ημα & συνα & ημα \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SET ISBN 960-7007-41-7
T_3 ISBN 960-7007-44-1

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
αίθρα
ανδρεα μεταξα 26
3301269-Fax 3301252
αθηνα 106 81.